1. Счет

1.1. Число. Счет до 100

В природе такой вещи, как «число», не существует. Число — это выдумка, которая позволяет людям изящнее разговаривать друг с другом. Если бы не было чисел, нам пришлось бы говорить так:

— На лугу пасется корова, и корова, и корова, и корова, и корова.

Благодаря числам эту же мысль можно выразить проще:

— На лугу пасется пять коров.

Число, взятое само по себе, ничего не значит. Если сказать просто «три», то получится какая-то чушь, ерунда, бессмыслица. Числа обретают смысл только тогда, когда за ними идут другие слова: «три котенка», «три поросенка», «три ребенка».

Об этой особенности чисел надо помнить родителям, которые хотят научить своих детей считать. Не много пользы в том, чтобы разучивать с ребенком числовой ряд наподобие стихотворения: «Раз, два, три, четыре, пять...» — и так далее. Если малыш знает наизусть такой «стишок», то это еще не значит, что он умеет считать. Дайте ему что-нибудь пересчитать, ну хотя бы его же собственные цветные карандаши, — и он будет постоянно сбиваться: перекладывание карандашей и декламирование стишка не будут скоординированы.

Числа для ребенка с самого начала должны быть связаны с какими-то предметами: «раз-карандаш, два-карандаш, три-карандаш». Идеальнее всего для этого подходят собственные пальчики: «один», — и я слегка дергаю малыша за мизинчик, «два», — за безымянный пальчик, и так далее — до десяти. Потом он, скорее всего, и меня захочет подергать за пальцы — отличная возможность «закрепить пройденный материал». Пересчитывание предметов становится теперь совсем легким делом: «один», — мизинчик коснулся первого карандаша, «два», — безымянный палец коснулся второго карандаша. Теперь уже со счета сбиться невозможно.

Можно считать, что числа — это дополнительные «имена», которые мы даем одинаковым предметам, собранным в одну кучку. Раздача таких дополнительных «имен» и называется пересчетом. Особое значение имеет «имя», полученное самым последним предметом. Оно дает нам ответ на вопрос: сколько всего предметов в кучке?

Освоив первый десяток, можно переходить к счету до двадцати. Для этой цели хорошо подходят пальчики на ногах: «Один-на-ноге, два-на-ноге, три-на-ноге...» Это никакой трудности не вызывает. Немного погодя придется, правда, признаться, что, на самом-то деле, так считать не принято. Вместо слова «ноге» почему-то говорят «дцать»: «Один-на-дцать, два-на-дцать, три-на-дцать...», — а для самого последнего пальчика на ноге придумали и вовсе особое слово: «двадцать». На этом этапе имеет смысл задержаться подольше и не торопиться переходить к счету до сотни. Иначе может получится, что ребенок впоследствии будет путать «тринадцать» и «тридцать», «шестнадцать» и «шестьдесят».

Счет от одиннадцати до двадцати — самый трудный, и дальше должно пойти уже легче, — жаль только, что пальчики закончились. Пора обзаводиться детскими счетами: десять рядов по десять бусинок. Наша цель — вовсе не в том, чтобы ребенок называл подряд все числа от единицы до ста. Для малыша считать до ста — занятие такое же трудное и бессмысленное, как и для взрослого — считать до тысячи. Важно, чтобы ребенок умел: (1) называть число отложенных бусинок, (2) самостоятельно откладывать определенное количество бусинок и (3) перебирая счеты, считать в пределах не слишком большого промежутка, например, от 75 до 85.

Откладываются бусинки следующим образом. Когда все бусинки собрались на правой стороне, это — «нисколько», «ноль» (или «нуль» — кому как больше нравится). «Один» или «раз» означает, что одна бусинка верхнего ряда перешла на левую сторону. «Десять» — весь верхний ряд оказывается на левой стороне. «Одиннадцать» — к уже отложенным десяти бусинкам из верхнего ряда присоединяется одна бусинка из второго. «Двадцать» — два верхних ряда полностью перебрались на левую сторону. «Тридцать» — три верхних ряда находятся на левой стороне, и так далее. (Когда придет пора считать на счетах «по-взрослому», бусинки будут откладываться уже по-другому — начиная с нижнего ряда.)

Хорошо бы навести ребенка на мысль, что, когда речь идет о числах больше десяти, их вовсе необязательно пересчитывать или откладывать от начала до конца по одной бусинке. Например, если требуется отложить «23», то можно сразу отложить весь первый ряд и сказать «десять», потом — весь второй ряд и сказать «двадцать», и уж только потом идет «двадцать один», «двадцать два», «двадцать три».

Теперь можно познакомить ребенка с записью чисел. Однозначные числа проблемы не представляют — они хорошо усваиваются по мере того, как ребенок учится писать цифры. А для интерпретации двузначных чисел требуется некоторое усилие. Как, например, расшифровать запись «38»? Первая цифра говорит о том, что на счетах надо полностью отложить 3 верхних ряда (3 полных десятка). Вторая цифра означает, что на следующем ряду следует отложить еще 8 отдельных бусинок. Когда ребенок перестанет путать числа типа «16» и «61», можно считать, что начальный этап обучения успешно завершен.

Конспект

1. *Числа* — это дополнительные «имена», которые мы даем при пересчете одинаковым предметам, собранным в одну кучку. «Имя» последнего предмета дает нам ответ на вопрос: Сколько предметов в кучке?

2. Счет до 10 удобно осваивать на собственных пальцах. При переходе к счету до 20 можно подключить пальцы на ногах. Тренироваться в счете до 100 удобно на детских счетах.

Задачи

1.1.1. Пересчитывать всё возможное, что попадается на глаза: монеты, камешки, ступеньки. Особенно ребенку нравится пересчитывать конфеты.

1.1.2. Отсчет заданного количества: «Ты можешь взять себе десять долек шоколада. Сделай, пожалуйста, пятнадцать шагов!»

1.1.3. Какое число идет после пяти, девяти, девятнадцати и т. п.? Какое число идет перед шестью, десятью, двадцатью?

1.1.4. Некоторые популярные настольные игры прекрасно вводят ребенка в мир чисел. Особенно домино. «Я взял семь костяшек. Возьми, пожалуйста, столько же! Теперь у меня — семь и у тебя — семь, а сколько осталось на базаре? Тут сколько очков? Правильно, шесть. И здесь шесть. А сколько будет всего? А вот, смотри, здесь вообще нет очков. Это — ноль, нисколько. Давай пересчитаем все костяшки и убедимся, что все на месте. Их всего должно быть двадцать восемь штук. И т.д. и т.п.» Другая замечательная игра — карты, подкидной дурак. Она органически включает в себя не только счет, но и понятия «больше», «меньше», «равно», а также простейшие уравнения: «У тебя осталось четыре карты. Сколько тебе надо еще взять карт из колоды, чтобы на руках у тебя оказалось шесть?» Дети обычно любят домино и карты, потому что это первая в их жизни реальная возможность обыграть взрослого.

1.2. Сложение и вычитание

«Вот смотри, я написал на бумаге

$$6 + 2$$

Это называется шесть *плюс* два. Это значит, что ты вначале берешь у папы шесть конфет, а потом еще две. Сколько всего конфет тебе достанется? Раз ты пока этого не знаешь, то давай сначала потренируемся на счетах. Мы откладываем на счетах шесть бусинок и затем добавляем к ним еще две. Сколько всего бусинок получилось? Правильно, восемь. Записываем ответ:

$$6 + 2 = \underline{\ 8\ }$$

Шесть плюс два *равно* восемь. Мы решили пример на *сложение*: мы *сложили* числа 6 и 2 и в результате получили 8. Вот, держи восемь конфет. (Разумеется, речь идет о крошечных конфетах-горошинах.)

А теперь, смотри, я написал

$$5 - 3$$

Это называется пять *минус* три. Это значит, что у нас на двоих пять конфет. Три из них я отдаю тебе. Сколько же тогда конфет остается у меня? Давай отложим на счетах вначале пять бусинок, а потом из них в обратную сторону переложим три. Что получается в результате? Правильно, пять минус три равно два:

$$5 - 3 = \underline{\ 2\ }$$

Мы решили пример на *вычитание*. Из числа 5 *вычли* число 3 и получили 2».

После такого объяснения ребенок уже способен самостоятельно делать упражнения на сложение и вычитание. Взрослый вручает ему листок бумаги, на котором написано, например, следующее:

$7 + 3 =$ $\qquad\qquad$ $10 + 2 =$

$7 - 3 =$ $\qquad\qquad$ $10 - 2 =$

и так далее.

В задачу ребенка входит выполнить на счетах указанные действия и записать ответ. После того как все ответы будут записаны, он показывает их взрослому. Взрослый восхищается правильными ответами, обводит их в кружочек, а неправильные просит пересчитать еще раз. Если один и тот же неправильный ответ появляется снова и снова, взрослый разбирается вместе с ребенком, где источник ошибки. Постепенно числа в примерах становятся всё больше и больше, однако второе число нет смысла делать больше тридцати, пока ребенку приходится пересчитывать его по бусинкам от начала до конца. Важно, чтобы ребенок не просто понял принцип сложения и вычитания, но и выработал соответствующий навык, то есть почти никогда не ошибался. Движения руки должны стать уверенными, — чтобы, откладывая одну бусинку, не задевать соседние. И еще один принцип: если сбился со счета, то не надо продолжать наобум — начинай всё сначала.

После того как ребенок начнет обращаться со счетами более или менее уверенно, ему можно подсказать одну «хитрость» (если он сам до нее не додумается): второе число, точно так же, как и первое, необязательно пересчитывать по бусинкам от начала до конца: можно вначале отложить десятки (пусть даже десяток получится «рваный» — часть бусинок с одного ряда, часть — со следующего) и только потом продолжать считать по отдельным бусинкам.

Еще на одно открытие можно натолкнуть ребенка, давая ему примеры такими парами:

$$1 + 26 =$$
$$26 + 1 =$$

Оказывается, удобнее вначале отложить большее число, а потом прибавлять к нему меньшее. Результат всё равно остается один и тот же.

Необязательное дополнение 1: «уравнения»

Постепенно можно переходить к более сложным заданиям. В следующем примере вместо многоточия надо поставить такое число, чтобы получился правильный ответ:

$$\ldots + 3 = 9$$

Подобного рода задачи решаются методом обращения времени вспять. Допустим, мы только что решили обычный пример «какое-то число плюс 3» и в результате получили 9. Откладываем на счетах 9 бусинок. Теперь как бы движемся по времени назад, воспроизводя решение примера в обратном порядке. Перекладываем бусинки обратно и считаем: три-бусинка, два-бусинка, раз-бусинка. Остается 6 бусинок. Значит, вместо многоточия надо поставить шестерку:

$$\underline{\ 6\ } + 3 = 9$$

Впрочем, очень скоро становится ясно, что перекладываемые бусинки можно считать и обычным образом: раз-бусинка, два-бусинка, три-бусинка. Результат от этого не изменится. Интересно отметить, что мы выполняем в точности такие же действия, как если бы решали пример «$9 - 3$».

Подобным же образом можно найти, какое число должно стоять вместо многоточия в таком примере:

$$\ldots - 2 = 5$$

Снова обращаем время вспять, и обнаруживается, что мы выполняем такие действия, как будто решаем пример «$5 + 2$». В итоге получаем:

$$\underline{\ 7\ } - 2 = 5$$

Но вот еще один пример с многоточием:

$$9 + \ldots = 12$$

Здесь многоточие стоит не на первом месте, а на втором, поэтому вспять обратить время не получится. Давайте, для начала, решим этот пример методом подбора. Попробуем вместо многоточия поставить единицу. Откладываем сперва девять бусинок, потом добавляем еще одну. Получился правильный ответ? Нет. Выходит, маловато добавили. Добавляем вторую бусинку. Снова маловато. Добавляем третью — теперь в самый раз. Всего добавили три бусинки. Значит, мы можем написать:

$$9 + \underline{\ 3\ } = 12$$

Тут можно ввести небольшое усовершенствование. Давайте, после того как мы отложили 9 бусинок, пометим еще как-нибудь бусинку номер 12. Например, сдвинем ее чуть-чуть влево — не до конца, а так, чтобы сразу после нее в ряду бусинок образовался небольшой разрыв. Теперь мы сразу видим, какие именно бусинки надо добавить к первым девяти, чтобы всего получилось двенадцать. Остается их только пересчитать: раз, два, три —

ответ готов. Но посмотрим внимательно на счеты. Здесь у нас отмечено 12 бусинок, поскольку именно после 12-ой бусинки идет разрыв. Из них 9 стоят особняком — сдвинуты до упора влево, — а остальные нам надо было пересчитать. То есть получается, что мы на самом-то деле отвечали на вопрос, сколько будет «$12 - 9$».

Теперь мы так же легко можем справиться и с таким примером:

$$14 - \ldots = 8$$

Откладываем 14 бусинок, помечаем бусинку номер 8 — например, сдвигая ее немножко вправо — и сразу видим, какие бусинки надо отнять от четырнадцати, чтобы получить восемь. Простым пересчетом находим, что их ровно 6. Таким образом, многоточие надо заменить на шестерку:

$$14 - \underline{\ 6\ } = 8$$

И снова приглядимся к счетам. По расположению бусинок мы видим, что фактически решали пример «$14 - 8$».

Необязательное дополнение 2: «отрицательные числа»

Пусть теперь дано:

$$3 - 3 =$$

Тут всё просто: откладываем сначала три бусинки, а потом те же три бусинки отправляем обратно. В результате получается «ничто» — ноль (пишется: $3 - 3 = 0$). А как быть, если встретится такое задание?

$$3 - 5 =$$

Мы привычным движением откладываем справа налево три бусинки, затем начинаем перекладывать по бусинке обратно: раз-бусинка, два-бусинка, три-бусинка — мы еще не успели переложить столько бусинок, сколько требуется, а они уже кончились. Что делать? Берем и разворачиваем счеты обратной стороной. Теперь все бусинки у нас оказались слева, и мы можем продолжить наше перекладывание: четыре-бусинка, пять-бусинка. С правой стороны у нас оказалось две бусинки. Вот это мы и напишем в качестве ответа. Только мы должны честно сознаться, что немножко схитрили, развернув счеты другой стороной Поэтому мы напишем не просто двойку, а еще поставим перед ней черточку — знак минус:

$$3 - 5 = \underline{-2\ }$$

Такие числа со знаком минус впереди, полученные хитрым способом, называются *отрицательными*. Нам еще предстоит много иметь с ними дело в будущем. Заметим, что мы всего переложили слева направо 5 бусинок, из них 3 на лицевой стороне счет, а остальные на обратной. Поэтому мы с тем же успехом могли бы решить пример «$5 - 3$» и приписать к ответу знак минус.

Но вот еще один пример с многоточием:

$$7 - \ldots = -3$$

Откладываем 7 бусинок и начинаем действовать методом подбора. Отнимаем для начала одну бусинку. Мало. Еще одну. Опять мало. Впрочем, ясно, что даже если сразу отнять все 7 бусинок, это всё равно будет мало. Поэтому единым махом перекладываем назад все оставшиеся бусинки и говорим «семь». Переворачиваем счеты обратной стороной. Тут нам надо переложить еще 3 бусинки. Так сразу и делаем. А теперь, поочередно касаясь их пальцем, продолжаем счет: «восемь», «девять», «десять». Это и есть ответ, который мы ищем:

$$7 - \underline{10} = -3$$

Поучается, что с лицевой стороны мы насчитали 7 бусинок, а с обратной стороны — еще 3 бусинки. Значит, мы фактически решили пример «$7 + 3$».

Конспект

1. *Сложение*. Пусть у нас в одной кучке шесть конфет, а в другой — две. Смешаем эти кучки в одну. Сколько в ней оказалось конфет? Ответ на эту задачу записывается в виде $6 + 2 = 8$ (шесть плюс два равно восемь). Мы выполнили пример на *сложение*: *сложили* шесть и два и получили восемь. Для решения этого примера на счетах откладываем вначале шесть бусинок, потом две и пересчитываем отложенные бусинки.

2. *Вычитание*. Пусть у нас есть кучка из пяти конфет. Мы взяли из нее три конфеты. Сколько осталось? Ответ записывается в виде $5 - 3 = 2$ (пять минус три равно два). Это пример на *вычитание*: мы *вычли* из пяти три и получили два. Для решения этого примера на счетах откладываем пять бусинок, возвращаем обратно три и пересчитываем оставшиеся.

3. *Уравнения*. Допустим в решенном примере на сложение «потерялось» первое число: $\ldots + 3 = 9$. Какое число потерялось? Представляем себе, что мы решили этот пример на счетах, и после этого «обращаем время вспять», фактически выполняя те же действия, которые мы совершаем при решении примера $9 - 3 = 6$. Подобным же образом, обращая время вспять, можно найти «потерянное» число в примере на вычитание: $\ldots - 2 = 5$, а именно: $5 + 2 = 7$. Глядя на бусинки, нетрудно также установить, что в примере $9 + \ldots = 12$ потерялось число $12 - 9 = 3$, а в примере $14 - \ldots = 8$ потерянным оказалось число $14 - 8 = 6$.

4. *Отрицательные числа*. Решая на счетах пример $3 - 5$, обнаруживаем, что из трех отложенных бусинок можно в обратную сторону переложить только три. Оставшиеся две бусинки перекладываем, развернув счеты обратной стороной. Ответ записываем в виде: $3 - 5 = -2$ (три минус пять равно минус два). С тем же успехом мы могли бы вычесть из пяти три и приписать перед результатом знак минус.

Задачи

1.2.1. «Мама дала Денису 7 конфет, а папа 5 конфет. Сколько конфет стало у Дениса?» Такого рода задач можно придумать множество, и хорошо, если они поначалу будут полностью соответствовать реальности. Главное действующее лицо — сам ребенок, и речь идет о приятных вещах. Мама в самом деле дает ему вкусные конфеты и спрашивает: «Сколько конфет я тебе дала?» Ребенок отвечает: «Семь». Потом он получает конфеты от папы, пересчитывает их и говорит: «Пять». Теперь он готов с радостью подумать над вопросом: «А сколько у тебя всего конфет?». Опять-таки, имеются в виду маленькие конфетки, не больше горошины.

1.2.2. Задачи на вычитание придумывать несколько труднее. Не следует повторять ошибку Мальвины, взявшуюся обучать арифметике Буратино. Если ребенок не любит делиться конфетами с младшим братиком, то это неподходящая тема для первых занятий по математике. Не слишком хорошо начинать и с таких задачек: «У Дениса было 10 конфет. 4 из них он съел. Сколько конфет осталось?» Здесь недостает наглядности: съеденных конфет-то не видно! Пожалуй, лучше так: «У папы было 10 конфет. 4 из них он оставил себе, а остальные дал Денису. Сколько конфет папа дал Денису?»

1.2.3. К вычитанию можно подойти еще и с другой стороны.

— Денис, сколько тебе дать конфет, — спрашивает папа.

— Двенадцать, — отвечает Денис.

— Хорошо, — говорит папа и дает Денису девять конфет. — Сколько конфет я должен тебе еще дать, чтобы получилось двенадцать?

1.3. Разряды чисел. Сложение и вычитание по разрядам

Взрослый высыпает на стол перед ребенком горсть однокопеечных монет и просит их пересчитать (подойдут любые мелкие монеты, на которых написана цифра 1). Эта сложная задача, требующая длительной концентрации внимания, и, вероятно, ребенку не сразу удастся с ней справиться. Потом взрослый показывает ребенку одну «хитрость». Оказывается, пересчитывая монеты, можно складывать их в стопки по десять. Теперь, если даже отвлечешься и собьешься со счета, не надо начинать всё с начала. Ведь содержание уже сформированных стопок пересчитывать не требуется! Несколько последних монет, из которых нельзя сделать полноценной стопки, остаются лежать на столе россыпью. Пусть ребенок убедиться, что считать по-новому гораздо быстрее и легче. Особенно легко определять количество монет, если все стопки по десять уже выложены. Ребенок должен научиться быстро отвечать на вопросы:

— Сколько стопок (полных десятков)?

— Сколько монет россыпью (отдельных единиц)?

— Сколько всего монет?

Следующее задание: быстро отобрать заданное количество монет (в пределах от 1 до 99), пользуясь заранее сформированными стопками.

Далее можно приступать к «хитрому» способу сложения и вычитания. «Отбери, пожалуйста, 32 монеты», — говорит взрослый ребенку. — «А теперь еще 24 монеты. Прекрасно! Сколько всего монет ты отобрал?» Хорошо бы ребенок сам догадался пересчитать вместе все стопки, а потом вместе все отдельные монеты (иначе придется ему это подсказать). Теперь он может быстро назвать ответ. Точно так же складываются числа 53 и 25, 40 и 38 и тому подобное. Но вот новое задание, казалось бы, очень похожее на предыдущие: сложить 36 и 27. Тут есть подвох. Если всё делать по-старому, то получится несуществующее число «пятьдесят тринадцать». Как быть? Ага! Из монет, оставшихся в россыпи, можно сделать еще одну полноценную стопку, и всё тогда становится на свои места. Пятьдесят тринадцать превращается в шестьдесят три. Теперь ребенок может самостоятельно тренироваться складывать любые числа (лишь бы результат оставался в пределах сотни).

Настала очередь разбираться с вычитанием. «Отбери, пожалуйста, 35 монет. А теперь 12 из них положи в сторону. Сколько монет осталось?» Ясно, что нужно убрать одну стопку и еще две монеты из россыпи. А вот задание посложнее: отобрать 35 монет и из них отложить в сторону 16. Ну, что ж, откладываем одну стопку, и еще пять монет из россыпи, а дальше что? Отдельных монеток больше не осталось. Придется рассыпать одну из стопок. Из новой россыпи и откладываем последнюю, шестую монету. После того как ребенок поймет принцип «хитрого» вычитания, ему можно давать соответствующие задания для самостоятельной работы.

Пора думать о новых усовершенствованиях. Всё-таки иметь дело со стопками не очень практично. Стопки неудобно перемещать с места на место: они того и гляди рассыпятся, да и хранить их непонятно как. Давайте использовать вместо стопок десятикопеечные монеты — «дестюльники». И пусть у нас будет «банк», в котором всегда можно поменять стопку из десяти однокопеечных монет на один дестюльник и обратно. Допустим, нам надо сложить 27 и 48. Мы берем вначале два дестюльника и семь копеек, потом добавляем четыре дестюльника и восемь копеек. Далее сгребаем дестюльники в одну кучку, а копеечные монеты — в другую. Из десяти копеечных монет формируем одну стопку, несем ее в банк и берем взамен еще один дестюльник. Получаем результат: семь дестюльников и пять копеек. Вычитание проделывается аналогично. Допустим, надо из числа 34 вычесть 18. Начинаем с трех дестюльников и четырех копеек. Откладываем один дестюльник на другой конец стола, потом — четыре копейки. Надо бы и дальше продолжать откладывать, да копейки кончились. Не беда. Меняем в банке один дестюльник на десять копеечных монет и продолжаем перекладывать копейки, пока на другом конце стола их не наберется восемь штук. Ответ получен!

Напрактиковавшись в «хитром» сложении и вычитании с помощью копеек и дестюльников, ребенок подготовлен к тому, чтобы пользоваться счетами «по-взрослому». Поначалу, все вычисления проводятся параллельно на монетах и на счетах. Новые правила откладывания чисел на счетах таковы. Когда все бусинки находятся на правой стороне — это «нисколько», «ноль». Число отдельных единиц (однокопеечных монет) откладываются справа налево на самом нижнем ряду, а число десятков (дестюльников) — на втором ряду снизу. Остальные ряды пока не трогаем. Пусть требуется сложить 47 и 35. Берем четыре дестюльника и семь копеек, а параллельно на счетах откладываем семь бусинок первого (нижнего) ряда, и четыре бусинки второго ряда. На другом конце стола заготавливаем три дестюльника и пять копеек. Операцию сложения начинаем с перетаскивания копеек. Перенесли первую копейку — и тут же отложили еще одну бусинку в нижнем ряду счет. Перенесли вторую копейку — отложили бусинку. Перенесли третью копейку — отложили бусинку. Меж тем, отдельных копеек набралось уже десять штук, а все бусинки в нижнем ряду переместились в левую сторону. Относим в банк десять копеек и берем взамен один дестюльник — на счетах сбрасываем все бусинки первого ряда и немедленно (обратным движением руки) откладываем одну бусинку во втором ряду. Перенесли четвертую копейку — отложили бусинку в нижнем ряду. Пятую — отложили бусинку. Копейки закончились. Переносим дестюльники. После каждого дестюльника откладываем бусинку во втором ряду. Когда дестюльники заканчиваются, убеждаемся, что на монетах и на счетах получился один и тот же ответ.

При вычитании чисел поступаем аналогично. Вначале удаляем одну за другой копейки — и параллельно сбрасываем бусинки в нижнем ряду. Если копеек не хватает, то берем в банке десять копеечных монет в обмен на дестюльник, — откладываем нижний ряд полностью и немедленно сбрасываем одну бусинку во втором ряду. (Впоследствии порядок расчетов с банком будет несколько изменен.) Покончив с копейками, удаляем один за другим дестюльники, параллельно сбрасывая бусинки во втором ряду.

После некоторой тренировки монеты становятся не нужны — ребенку достаточно пользоваться одними лишь счетами.

Этот этап очень сложен и очень важен, потому что здесь ребенок впервые сталкивается с математической абстракцией. Здесь важно не торопиться и хорошенько закрепить пройденный материал, прежде чем идти дальше. Отныне сложение и вычитание чисел не должно представлять никакой проблемы.

Необязательное дополнение 1: «уравнения»

Возвращаемся к заданиям, в которых надо заменить многоточие на подходящее число, например:

$\ldots + 58 = 93$

$86 - \ldots = 47$

Раньше, когда мы имели дело с маленькими числами, которые легко охватить одним взглядом, ребенок мог без труда «увидеть» верный ответ, и ему необязательно было очень внимательно слушать объяснения взрослых. Теперь, казалось бы, почти те же самые задачи могут вдруг оказаться ужасно сложными.

Это хороший повод поговорить об одном хорошем способе упрощения сложных задач. Пусть, например, нам досталось такое задание:

$\ldots + 58 = 93$

Отставим на время этот пример в сторонку, а вместо него возьмем пример очень похожий, но совсем простой:

$\ldots + 3 = 5$

Ну, конечно, тут вместо многоточия нужно поставить двойку:

$\underline{\ 2\ } + 3 = 5$

Ведь мы этим уже занимались! Мы можем даже теперь взять однокопеечные монетки и выложить их таким образом:

① ①   ① ① ①

И тогда всё сразу становится ясно. Но спрашивается, а как можно получить этот ответ из тех чисел, которые нам известны? Конечно, так:

$5 - 3 = 2$

А теперь возвращаемся к первоначальному заданию и производим те же самые действия с исходными числами:

$93 - 58 = 35$

Можно выписывать ответ:

$\underline{\ 35\ } + 58 = 93$

Только его еще обязательно надо проверить: всё-таки мы получили его не совсем строгим способом. То есть мы должны теперь честно посчитать на счетах, сколько будет «$35 + 58$», и убедиться, что мы получим в результате именно 93.

Все другие задания с многоточиями решаются точно таким же образом. Давайте, еще раз посмотрим на всю ту же картинку и составим табличку типовых решений:

① ①   ① ① ①

Полный пример	С многоточием	Как получить ответ?
$\underline{\ 2\ } + 3 = 5$	$\ldots + 3 = 5$	$5 - 3 = 2$
$2 + \underline{\ 3\ } = 5$	$2 + \ldots = 5$	$5 - 2 = 3$
$\underline{\ 5\ } - 2 = 3$	$\ldots - 2 = 3$	$2 + 3 = 5$
$5 - \underline{\ 2\ } = 3$	$5 - \ldots = 3$	$5 - 3 = 2$

Необязательное дополнение 2: «отрицательные числа»

Для примеров с отрицательными числами предыдущую табличку можно продолжить:

Полный пример	С многоточием	Как получить ответ?
$3 - 5 = \underline{-2}$	$3 - 5 = - \ldots$	$5 - 3 = 2$
$\underline{3} - 5 = -2$	$\ldots - 5 = -2$	$5 - 2 = 3$
$3 - \underline{5} = -2$	$3 - \ldots = -2$	$3 + 2 = 5$

Конспект

1. *Пересчет*. Допустим, мы хотим пересчитать однокопеечные монеты (в пределах сотни). Для этого складываем их в стопки по десять штук. Несколько последних монет, из которых нельзя сделать полноценной стопки, остаются лежать россыпью. Если у нас пять стопок и три монеты россыпью, значит, всего у нас 53 монеты.

2. *Сложение*. Пусть надо сложить две кучки монет. Каждую кучки представляем в виде стопок по 10 монет и россыпи. Например, в первой кучке может оказаться 3 стопки и 6 отдельных монеток — всего 36 монет. А во второй кучке — 2 стопки и 7 отдельных монеток — всего 27 монет. Сдвигаем кучки вместе — стопки к стопкам, россыпь к россыпи. Получаем $3 + 2 = 5$ стопок и $6 + 7 = 13$ монеток в россыпи. Из этих 13 монеток мы составляем еще одну полноценную стопку, и у нас остаются еще 3 монетки. Итого, у нас $5 + 1 = 6$ стопок и 3 отдельные монетки — всего 63 монет.

3. *Вычитание*. Допустим, у нас есть кучка из 35 монет — 3 стопки и 5 монеток россыпью — и мы хотим отобрать из нее 16 монет. Отбираем одну стопку и замечаем, что не можем отобрать 6 отдельных монеток из россыпи в 5 монет. Поэтому рассыпаем одну из оставшихся стопок. Теперь у нас в россыпи $10 + 5 = 15$ монет. Отбираем из них 6 монеток. Смотрим, что осталось: из трех первоначальных стопок одну отобрали и одну рассыпали, осталась одна. В россыпи у нас находится $15 - 6 = 9$ монеток. Значит, всего осталось 19 монет.

4. *«Банк»*. Вместо стопок из десяти однокопеечных монет удобнее пользоваться десятикопеечными монетами — «дестюльниками». Если при сложении кучек у нас набирается больше десяти копеек россыпью, мы идем в «банк» и меняем десять однокопеечных монет на один дестюльник. Если при разбиении одной кучки на две части, нам не хватает монет в россыпи, мы меняем в «банке» один дестюльник на десять однокопеечных монет.

5. *Сложение и вычитание на счетах*. Все действия с монетами — отдельными копейками и дестюльниками — можно «перенести» на счеты. Однокопеечные монеты мы заменяем бусинками из нижнего ряда, которые мы откладываем с правой стороны на левую. Дестюльники заменяем бусинками из второго ряда. Если при сложении у нас набирается полный нижний ряд, мы его сбрасываем обратно и тут же откладываем бусинку из второго ряда. Если при вычитании нам не хватает бусинок на нижнем ряду, откладываем нижний ряд полностью и немедленно сбрасываем одну бусинку во втором ряду.

6. *Уравнения*. Если уравнения с большими числами, например $86 - \ldots = 47$, вызывают затруднения, имеет смысл вначале решить похожее уравнение с маленькими числами, например $5 - \ldots = 2$. Здесь сразу видно, что вместо многоточия надо поставить $5 - 2 = 3$. Значит, в исходном уравнении вместо многоточия должно стоять $86 - 47 = 39$.

Задачи

1.3.1. Взрослый называет число. Вопрос: сколько в этом числе полных десятков, сколько отдельных единиц?

1.3.2. Обратная задача. В некотором числе столько-то полных десятков и столько-то отдельных единиц. Что это за число?

1.4. Многозначные числа

Снова достаем монеты и счеты. Давайте вспомним, что надо делать, чтобы сложить числа 9 и 3 на монетах и счетах одновременно. Вспомнили? Получили ответ? Хорошо. А теперь сложим 90 и 30. Это почти та же самая задача. Кладем перед собой девять дестюльников, а немного поодаль заготовляем еще три дестюльника. На счетах во втором ряду откладываем девять бусинок. Перетаскиваем к себе один дестюльник и откладываем во втором ряду еще одну бусинку. Настало время идти в банк. Отдаем там десять дестюльников и получаем взамен один рубль, потому что один рубль — это столько же, сколько десять дестюльников или сто копеек. На счетах сбрасываем все бусинки во втором ряду и откладываем одну бусинку в третьем ряду. Третий ряд для того и предназначен, чтобы откладывать здесь рубли или сотни копеек. Теперь осталось перетащить к себе оставшиеся два дестюльника и отложить две бусинки во втором ряду. Ответ получен! Осталось его правильно записать.

Осматриваем ряды снизу вверх. На первом ряду ноль бусинок: пишем на бумаге цифру 0. На втором ряду отложено две бусинки: приписываем слева цифру 2. На третьем ряду отложена одна бусинка: дописываем слева 1. На остальных рядах отложенных бусинок нет: писать больше ничего не требуется. Мы получили в результате число 120 (читается «сто двадцать»). Вот мы и научились переваливать за сотню! Если нам теперь будет дано какое-то число, написанное на бумаге, — несколько цифр, стоящих друг за другом — мы всегда сможем отложить его на счетах. Нижний ряд бусинок соответствует последней цифре числа, второй ряд с низу — предпоследней и так далее. Не беда, если мы пока не умеем читать слишком длинные числа.

Теперь посчитаем, чему равно $120 - 30$. Для этого мы обратим все вычисления из прошлого примера вспять, только при хождении в банк слегка отклонимся от обратного порядка. А именно, когда придет время отнять от рубля один дестюльник, мы сперва возьмем в банке десять дестюльников, отложим в сторону один из них, и лишь потом отнесем в банк один рубль. Соответственно, вначале отложим на счетах все бусинки второго ряда, сбросим из них одну, а затем сбросим также бусинку в третьем ряду. Это, вообще-то, не так уж и важно, в каком порядке проводить операции с банком, но на практике при вычислении на счетах удобнее вначале разобраться с нижним рядом, и только потом переходить к верхнему. Это позволяет делать вычисления более быстро и уменьшает вероятность ошибки.

Сможем ли мы теперь вычислить $900 + 300$? Тут почти всё то же самое, только складывать надо не копейки, а рубли, и, когда наберется десяток рублей, следует поменять их на одну десятирублевую бумажку, которая заменяет тысячу копеек.

Вызовут ли нас затруднения вычисления типа $91 + 34$ или $921 + 345$? Пожалуй, нет, не вызовут: все они состоят из знакомых нам действий с монетами или бусинками. Постепенно усложняем задания и приучаемся обходиться одними счетами, без монет:

$900 - 200 =$	$114 - 23 =$	$1104 - 203 =$	$1140 - 230 =$	$1149 - 235 =$
$91 + 23 =$	$901 + 203 =$	$910 + 230 =$	$914 + 235 =$	и тому подобное

Особых пояснений требуют задания типа

$$99 + 1 =$$
$$100 - 1 =$$

В подобных случаях требуется проводить с банком две обменные операции. Например, для того чтобы из ста вычесть единицу, мы привычным образом берем в банке десять однокопеечных монет и откладываем одну из них в сторону. Затем настает время отнести в банк дестюльник, но свободного дестюльника у нас нету. Поэтому мы берем в банке десять дестюльников, и один из них сразу же возвращаем обратно. После этого мы отдаем банку один рубль, и у нас на руках остается девять дестильников и девять однокопеечных монет.

Конспект

1. Чтобы сложить числа 90 и 30, надо проделать те же действия, что и при сложении 9 и 3. Вся разница заключается в том, что при сложении монет надо брать не копейки, а дестюльники. При вычислении на счетах надо откладывать бусинки не в первом нижнем ряду, а во втором. Чтобы сложить 900 и 300, мы берем рублевые («стокопеечные») монеты, а на счетах — откладываем бусинки в третьем ряду.

2. Всякое число можно записать бумаге в виде одной или нескольких цифр. Эту запись можно перенести на счеты. В нижнем ряду счет откладываем столько бусинок, какова последняя цифра в записи числа. Во втором ряду снизу откладываем предпоследнюю цифру и так далее. Благодаря этому мы можем складывать и вычитать на счетах любые числа, даже не умея их называть.

Задачи

1.4.1. Вставить подходящие числа вместо многоточий:

$25 + \ldots = 31$ $\qquad$ $60 - \ldots = 45$

$\ldots + 42 = 50$ $\qquad$ $\ldots - 4 = 18$ и т. п.

1.4.2. Перевести в копейки:

4 р. $\qquad$ 32 р. 63 к.

7 р. 34 к. $\qquad$ и т. п.

1.4.3. Перевести в рубли:

300 к.

2500 к. и т. п.

1.4.4. Выразить в рублях и копейках:

356 к.

7645 к. и т. п.

1.4.5. Вычислить:

4 р. $+ 38$ к.

4 р. $- 38$ к. и т. п.

Это задание — хороший повод поговорить о правиле: складывать можно только одинаковые вещи: например, рубли с рублями или копейки с копейками. *Число рублей с числом* *копеек складывать нельзя!* Вначале надо рубли перевести в копейки, и только тогда полученные числа можно складывать, то есть:

$$4 \text{ р.} + 38 \text{ к.} = 400 \text{ к.} + 38 \text{ к.} = 438 \text{ к.} = 4 \text{ р.} 38 \text{ к.}$$

Такое же правило действует и при вычитании.

Замечание. В одном из школьных учебников мне встретилась задача: «В классе 12 мальчиков и 14 девочек. Сколько всего в классе детей?» Решение было преподнесено в следующем виде:

$$12 \text{ мальчиков} + 14 \text{ девочек} = 26 \text{ детей}$$

На мой взгляд, такая запись, попавшись на глаза начинающему ученику, может способствовать развитию у него дурной привычки складывать, не задумываясь, всё без разбору. Правильно писать так:

$$12 + 14 = 26$$

Или:

$$12 \text{ детей} + 14 \text{ детей} = 26 \text{ детей}$$

Пока «мальчики» и «девочки» не переведены в разряд «детей», складывать их нельзя.

1.5. Умножение

На этот раз нам понадобятся несколько пятикопеечных монет и, конечно же, снова счеты. Допустим, мы хотим купить себе конфет. Каждая конфета стоит 5 копеек. Значит, чтобы купить две конфеты, мы должны отдать продавщице две пятикопеечные монеты — кладем их перед собой на стол. Теперь посчитаем, сколько здесь копеек — откладываем на счетах:

$$5 + 5 = 10$$

Эту же запись можно сделать немножко покороче. Когда я беру 2 раза по 5, я записываю это в виде примера на *умножение*:

$$2 \cdot 5 = 10$$

Это читается: «Два раза по пять равно десяти». (Хотя это и не общепринятый способ чтения, я всё же настоятельно бы посоветовал пока читать эту запись именно так.) Теперь, допустим, мы хотим купить 3 конфеты. Выкладываем перед собой три монеты, откладываем на счетах 3 раза по 5 и получаем:

$$5 + 5 + 5 = 15$$

Или в виде примера на умножение:

$$3 \cdot 5 = 15$$

Еще пара таких демонстраций — и ребенок уже способен справляться с подобными примерами самостоятельно. Монеты вскоре становятся не нужны — достаточно одних счет. Теперь снова дело за практикой. Постепенно ребенок научится (почти безошибочно) считать все примеры из таблицы умножения. При этом многие ответы он мимоходом выучит наизусть. Настает время обратить его внимание на некоторые хитрости.

(1) Числа в примерах на умножение можно менять местами. Так, к примеру, 5 раз по 3 это ровно столько же, сколько 3 раза по 5. В этом легко убедиться если посмотреть на такую картинку:

● ● ● ● ●
● ● ● ● ●
● ● ● ● ●

Здесь пять столбцов по три кружка в каждом столбце, а значит, общее число кружков $5 \cdot 3$. С другой стороны, здесь три ряда по пять кружков в каждом ряду, то есть всего кружков $3 \cdot 5$. Таким образом, $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$. Теперь, когда мы узнали эту хитрость, нам позволительно читать запись

$$5 \cdot 3$$

как «пять умножить на три». Именно так принято говорить по-русски, однако по сути это неправильно. «Пять умножить на три» означает буквально «берем пятерку три раза», в то время как запись «$5 \cdot 3$» означает на самом-то деле «берем тройку пять раз». Большой беды в этой путанице нет, потому что «пять умножить на три» в точности равно «трем умножить на пять». Другое русское выражение — «пятью три» — является, безусловно, более правильным. Не берусь утверждать про все иностранные языки, но по крайней мере в английском, немецком и французском выражение «$5 \cdot 3$» читается (в буквальном переводе) как «пять раз по три».

(2) Умножать на 10, оказывается, очень легко. Чтобы в этом убедиться, снова достаем полный набор наших монет. Допустим у нас есть 23 копейки (две дестюльника и три копейки):

●
●
○
○
○

Мы хотим, чтобы денег у нас стало в 10 раз больше. Докладываем монетки таким образом:

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Затем каждый ряд дестюльников заменяем на рубль, а каждый ряд копеек заменяем на дестюльник. Получаем 2 рубля и 3 дестюльника, то есть 230 копеек. Чтобы умножить число на 10, надо к этому числу справа приписать ноль:

$$10 \cdot 23 = 23 \cdot 10 = 230$$

Пусть у нас на счетах отложено число 23. Умножить на 10 — это значит все отложенные бусинки «переселить» на один ряд выше. Впрочем, будет очень полезно один разок действительно десять раз «тупо» отложить на счетах число 23 (или любое другое) и посмотреть, что получится.

(3) Допустим, мы хотим на счетах умножить на 30 число 23. Будем ли мы откладывать 23 тридцать раз? Нет, конечно. Мы сразу отложим 23 десять раз, то есть попросту отложим число 230. Всего надо так сделать 3 раза, потому что 30 это не что иное как 3 раза по 10. Получаем:

$$30 \cdot 23 = 3 \cdot 230 = 690$$

Умножать на 100 тоже очень просто, потому что 100 — это 10 раз по 10. Умножим 23 на 10. Приписав ноль, получим 230. Потом еще раз умножим на десять. Припишем еще один ноль: 2300. В итоге выходит:

$$100 \cdot 23 = 23 \cdot 100 = 2300$$

При умножении на 100 к числу надо приписать два нуля. А на счетах при умножении на 100 все отложенные бусинки «переселяются» на два ряда выше.

А если мы захотим умножить 23 на 300? Сразу откладываем на счетах 2300 и делаем так всего три раза. Получаем:

$$300 \cdot 23 = 3 \cdot 2300 = 6900$$

А если надо умножить 230 на 300? Тут всё то же самое:

$$300 \cdot 230 = 3 \cdot 23000 = 69000$$

Мы замечаем одну полезную вещь: когда мы перемножаем «круглые» числа (то есть такие, которые оканчиваются на ноль), мы можем поначалу вовсе отбросить все конечные нули, выполнить умножение без них, а потом к результату приписать столько нулей, сколько мы отбросили. Например, в примере на умножение

$$300 \cdot 230$$

мы отбрасываем три конечных нуля и получаем

$$3 \cdot 23 = 69$$

Теперь сталось только приписать сюда те самые три нуля, которые мы отбросили:

$$300 \cdot 230 = 69000$$

(4) Если на 10 умножать очень легко, то и на 11 ненамного труднее. Допустим, мы хотим умножить на 11 всё то же самое число 23. Для этого надо число 23 отложить на счетах 11 раз. Но мы уже знаем, какое число мы получим после того, как сделаем это 10 раз. Это 230. Поэтому мы сразу откладываем 230, после чего нам остается отложить 23 только один раз. Мы получаем ответ всего в два «хода»:

$$11 \cdot 23 = 253$$

Однако, если так легко умножать на 11, то и на 12 — тоже нетрудно. Одни раз отложим 230 и два раза по 23. В результате получим (в три «хода»):

$$12 \cdot 23 = 276$$

Умножать на 20 мы уже умеем. Для этого понадобится лишь два «хода»: два раза по 230 — и готово!

А сколько «ходов» нужно чтобы умножить 23 на 21? — Только три: откладываем два раза по 230 и один раз 23. Теперь нам нетрудно будет вычислить и такие примеры:

$101 \cdot 23$ (в два «хода»)

$102 \cdot 23$ (в три «хода»)

Оказывается, мы уже умеем легко перемножать между собой довольно большие числа.

(5) Пусть нам теперь требуется вычислить $9 \cdot 23$. Значит ли это, что мы должны, по старинке, откладывать на счетах число 23 целых девять раз? Нет, не значит. Допустим, мы просчитались, и вместо девяти раз отложили это число десять раз. Такую ситуацию легко исправить. Прокручиваем последний, лишний, «ход» в обратную сторону (то есть, вычитаем 23) — и всё в порядке. Но ведь мы уже заранее знаем, что получится, если отложить

число 23 десять раз. Поэтому мы можем сознательно как бы просчитаться, а потом поправиться. Откладываем 230, вычитаем 23, и получаем ответ (в два «хода»):

$$9 \cdot 23 = 207$$

Подобным же образом, чтобы вычислить $8 \cdot 23$, надо «поправиться» два раза. Откладываем 230 и два раза отнимаем 23 (всего три «хода» вместо восьми):

$$8 \cdot 23 = 184$$

Используя данный прием, мы теперь сумеем легко вычислить:

$19 \cdot 23$ (в три «хода)

$99 \cdot 23$ (в два «хода») .

Разумеется, усложнение примеров не самоцель. Важно, чтобы ребенок разобрался во всех хитростях и научился ими пользоваться. Однако перемножать на счетах числа в пределах 24 — это вполне посильная задача. В этом случае для решения одного примера понадобится не более шести «ходов».

(6) Самый легкий случай — это когда требуется умножить на число 0 (ноль). Отложим ли мы число 23 ноль раз или ноль бусинок отложим 23 раза, результат всё равно один:

$$0 \cdot 23 = 0$$
$$23 \cdot 0 = 0$$

Замечание 1. В качестве знака умножения вместо точки часто используют косой крестик. Так, записи $3 \cdot 5$ и 3×5 означают одно и то же.

Замечание 2. В русскоязычных школьных учебниках по математике умножение определяется как $2 \cdot 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$. Хотя такое определение и не приводит к ошибкам в вычислениях, по сути оно неверно. Когда мы говорим *две конфеты*, мы имеем в виду *конфета* + *конфета*. Когда мы говорим *две монеты по пять копеек*, мы имеем в виду 5 *копеек* + 5 *копеек*. Здесь двойка отвечает на вопрос *сколько* и стоит на первом места, а пятерка отвечает на вопрос *что* и стоит на втором месте. И такой порядок принят всегда — что бы мы ни пересчитывали: будь то предметы, деньги, метры, минуты или что угодно. Отступать от этого порядка при переходе к «голым» числам было бы совершенно нелогично. Важно понимать, что слова «две монеты» задают точно такое же отношение между понятиями *двойка* и *монета*, какое существует между числами 2 и 5 в записи $2 \cdot 5$, тем более что за абстрактным числом 5 вполне может стоять не что иное, как пятикопеечная монета. Знак умножения ($\cdot$) между «голым» числами ставится только для того, чтобы они не слились в одно число (25). Во всех остальных случаях этот знак не нужен и, как правило, опускается.

Конспект

1. Чтобы узнать, сколько стоят три конфеты по пять копеек, мы откладываем на счетах три раза по пять бусинок. На бумаге эта задача и ее ответ записывается в виде $5 + 5 + 5 = 15$ или сокращенно $3 \cdot 5 = 15$ (три раза по пять равно пятнадцать). Это пример на *умножение*: следовало бы говорить, что мы пять *умножили* на три и получили пятнадцать. Однако на практике запись $3 \cdot 5$ в русском языке принято не совсем правильно читать «три умножить на пять». Эта путаница не приводит к недоразумениям, потому что если взять пять раз по три, то мы получим тот же самый результат — пятнадцать. Числа, входящие в пример на умножение можно менять местами. Пять умножить на три это то же самое, что и три умножить на пять: $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$.

2. Чтобы умножить число на 10, надо приписать к нему справа ноль. При этом бусинки на счетах «переселяются» на один ряд выше. При умножении на сто мы приписываем к числу два нуля, а бусинки на счетах «переселяем» на два ряда выше. Когда мы перемножаем «круглые» числа (оканчивающиеся на 0), мы можем поначалу отбросить все конечные нули, выполнить умножение без них, а потом к результату приписать столько нулей, сколько мы отбросили.

3. Чтобы умножить 23 на 30, откладываем на счетах три раза число 230. Умножая 23 на 31, откладываем на счетах три раза число 230 и один раз число 23. При умножении 23 на 102 откладываем на счетах один раз число 2300 и два раза число 23.

4. Чтобы умножить 23 на 9, откладываем на счетах число 230 и отнимаем от него число 23. Умножая 23 на 98, откладываем 2300 и два раза отнимаем 23.

5. При умножении любого числа на ноль получается ноль.

Задачи (в дополнение к обычным примерам на умножение)

1.5.1. Как удобнее вычислять:

7 раз по 8 или 8 раз по 7 ?

11 раз по 19 или 19 раз по 11 ? и т. п.

1.5.2. За сколько «ходов» можно вычислить следующие примеры:

$15 \cdot 15$ $\qquad$ $16 \cdot 201$

$89 \cdot 9$ $\qquad$ $13 \cdot 0$ и т. п.

1.6. Деление нацело и деление с остатком

Снова запасаемся счетами и «идем покупать» конфеты.

Задача 1.6.1. Известно, что одна конфета стоит 5 копеек, а на покупку потрачено 15 копеек. Спрашивается: сколько конфет куплено? Эту задачу можно решить двумя способами.

Первый способ. Считаем, что продавщица сначала получила от нас 5 копеек и выдала одну конфету, потом получила еще 5 копеек и выдала еще одну конфету — и так далее, пока у нее не набралось 15 копеек. Откладываем на счетах 5 копеек и говорим: «Одна конфета». Затем откладываем еще 5 копеек. На этот раз мы не только говорим: «Две конфеты», — но еще и смотрим на счеты: не набралось ли там уже 15 копеек? — Нет, не набралось. Тогда снова откладываем 5 копеек, говорим: «Три конфеты», — и смотрим на счеты. На этот раз на счетах действительно 15 копеек. Расчет с продавщицей закончен. У нас на руках три конфеты. Задача решена.

Отмечу, что точно такое же решение подошло бы, если б нас просто попросили вставить пропущенное число в запись

$$\_\_ \cdot 5 = 15$$

Второй способ. Откладываем на счетах 15 копеек. Столько денег мы собираемся заплатить продавщице. Но отдаем мы их не сразу, а порциями по 5 копеек. После каждой такой порции у нас прибавляется по одной конфете. Сбрасываем на счетах 5 копеек и говорим «раз». Потом сбрасываем еще 5 копеек и говорим «два». И так далее — до тех пор, пока не кончатся все деньги. В данном случае это произойдет на счет «три». Значит, мы купили три конфеты.

Подобная задача встречается настолько часто, что для ее решения введено специальное обозначение:

$$15/5 = 3$$

Читается: «Пятнадцать поделить на пять равно три».

Какой же способ удобнее? Мне лично больше нравится второй: я вначале откладываю на счетах стоимость всей покупки, а потом уже не обязан держать это число в памяти. Но еще лучше, конечно, помнить ответ примера на умножение:

$$3 \cdot 5 = 15$$

Тогда, собственно, и считать ничего не нужно. Можно сразу выписывать ответ.

После того как ребенок самостоятельно попрактиковался в делении не слишком больших чисел (прибегая, в случае необходимости, к счетам), настает время обсудить некоторые тонкости.

(1) Проще всего делить на 10. Пусть, например, требуется решить пример:

$$230/10 =$$

Очень легко подобрать такое число, которое при умножении на 10 дает 230. Это, конечно, 23. Поэтому

$$230/10 = 23$$

(2) Давайте вычислим на счетах

$$150/50$$

При этом мы можем представить себе, что мы опять покупаем конфеты. Только на этот раз каждая кофета стоит 50 копеек, а на всю покупку потрачено 150 копеек (1 руб. 50 коп.). Спрашивается: сколько конфет мы купили? На счетах эта задача решается точь-в-точь так же, как и в том случае, когда одна конфета стоит 5 копеек, а на всю покупку тратится 15 копеек. Единственное отличие заключается в том, что все операции с бусинками мы проделываем на один ряд выше. Ответ у нас, естественно, получается тот же самый, что и раньше. Поэтому мы можем записать:

$$150/50 = 15/5 = 3$$

Точно так же:

$$1500/500 = 15/5 = 3$$

Вообще, нетрудно сообразить, что, когда мы делим друг на друга «круглые» числа (то есть такие числа, которые оканчиваются нулями), мы можем зачеркнуть у обоих чисел на конце по одинаковому числу нулей, и ответ при этом не изменится.

(3) К сожалению, умение быстро делить на 10 не помогает в делении на 11. И всё же, некоторые полезные трюки стоит иметь в виду. Пусть, например, требуется найти

$$253/23$$

Решаем этот пример вторым способом: откладываем сперва на счетах число 253, а потом вместо того чтобы десять раз отнимать число 23, отнимаем сразу 230 и говорим: «Десять». После этого на счет «одиннадцать» все бусинки заканчиваются, и мы получаем (в два «хода»):

$$253/23 = 11$$

(4) Теперь, пусть требуется поделить 207 на 23. Если мы решаем этот пример вторым способом, то приходится действовать «в лоб»: отнимать и отнимать всё время по 23, пока

бусинки не закончатся. Однако первый способ оставляет некоторый простор для маневров. Тут всё как и при умножении. Допустим, мы, зазевавшись, отложили 23 десять раз — получили 230 и спохватились: случился перебор. Чтобы не начинать всё заново, прокручиваем назад последний «ход»: отнимаем 23 и получаем 207. Значит,

$$207/23 = 9$$

(5) Ноль, поделенный на любое число, равен нулю. Это очевидно. А вот делить на сам ноль нельзя. Если конфета стоит 0 копеек, а мы на покупку потратили 15 копеек, то это какая-то ерунда. Так не бывает. Нет такого числа, которое могло бы на законном основании заполнить пустое место в записи:

$$\_\_ \cdot 0 = 15$$

Если каждая конфета достается нам даром, то и наши затраты должны быть нулевыми, сколько бы мы конфет ни получали:

$$1 \cdot 0 = 0 \qquad 10 \cdot 0 = 0$$
$$2 \cdot 0 = 0 \qquad 100 \cdot 0 = 0$$

Но ведь можно поинтересоваться, сколько конфет по цене 0 копеек за штуку мы получили, заплатив 0 копеек? Поинтересоваться-то можно, да только запись

$$0/0$$

никак не приблизит нас к ответу: ноль, поделенный на ноль, может оказаться равен любому числу. Поэтому мы с такой записью связываться не будем и тоже наложим на нее запрет.

(6) Некоторое время мы будем также считать бессмыслицей запись типа

$$17/5$$

Если мы покупаем конфеты по 5 копеек за штуку, а продавщица требует от нас уплатить 17 копеек, то она явно неправа. В подобных случаях говорят, что семнадцать на пять нацело не делится. Причем тут словечко «нацело»? — При том, что деление, которому мы научились, именно так и называется — деление нацело. Однако есть и другие разновидности деления.

Рассмотрим еще одну задачу.

Задача 1.6.2. У нас в кармане 17 копеек, а мы хотим купить как можно больше конфет, каждая из которых стоит 5 копеек. Сколько конфет мы сможем купить и сколько денег у нас останется?

Откладываем на счетах 17 копеек. Это все наши деньги. Вычитаем теперь отсюда порции по 5 копеек и представляем себе, что за каждую порцию мы получаем одну конфету. После того как мы приобрели 3 конфеты, у нас на руках остается только 2 копейки, и больше конфет мы купить не можем. Ответ на задачу записывается так:

$$17 : 5 = 3 \text{ (ост. 2)}$$

Читается: «Семнадцать поделить на пять равно трем, остаток два». Такой тип деления называется «делением с остатком». Мы можем также написать:

$$17 = 3 \cdot 5 + 2$$

Здесь наглядно показано, куда ушли наши 17 копеек. Три раза по пять копеек (а всего пятнадцать) — столько мы отдали за конфеты, да плюс еще две копейки, которые у нас остались.

Задача 1.6.2а. У нас в кармане 170 копеек, а мы хотим купить как можно больше конфет, каждая из которых стоит 50 копеек. Сколько конфет мы сможем купить и сколько денег у нас останется?

Эта задача решается точно так же как и предыдущая, только бусинки на счетах надо всё время откладывать на один ряд выше. Получаем:

$$170 : 50 = 3 \text{ (ост. } 20)$$

Или:

$$170 = 3 \cdot 50 + 20$$

Давайте возьмем на себе заметку: когда мы делим «круглые» числа с остатком, мы не можем так запросто зачеркивать у них на конце по одинаковому количеству нулей, как это мы делали при делении нацело. Если мы это сделаем, то недосчитаемся нулей в остатке.

Теперь — дело за практикой. При этом следует иметь в виду, что остаток может оказаться равным нулю, например:

$$15 : 5 = 3 \text{ (ост. } 0)$$

И, наконец, еще одна задача.

Задача 1.6.3. Купили 3 конфеты, заплатив за покупку 15 копеек. Сколько стоит одна конфета?

К этой задаче можно подойти «чисто формально». От нас фактически требуется вставить правильное число в запись

$$3 \cdot \_\_ = 15$$

Но ведь мы знаем, что числа в примерах на умножение можно менять местами. Поэтому, задача будет решена, если мы найдем подходящее число, которое можно подставить сюда:

$$\_\_ \cdot 3 = 15$$

Такую задачу мы уже умеем решать:

$$15/3 = 5$$

Это уже знакомое нам деление нацело. Откладываем на счетах 15 бусинок, и принимаемся сбрасывать всякий раз по 3 бусинки, пока бусинок больше не останется. Поскольку бусинки пришлось сбрасывать 5 раз, то и ответ у задачи 5, а точнее (вспомним условие) 5 копеек.

Однако, того, кто привык докапываться до сути вещей, такое формальное решение удовлетворить, конечно, не должно. Ведь нельзя же, в самом деле, отнять 3 конфеты от 15 копеек! От копеек можно отнимать только копейки!

Задача, по сути, заключается в том, чтобы 15 однокопеечных монеток поделить на три одинаковые кучки. Откладываем на счетах 15 бусинок, а потом берем себе, в самом деле, настоящие монетки и начинаем их делить — так, словно делим их поровну между тремя детьми. Вот тебе одна монетка, вот тебе одна монетка, вот тебе одна монетка — прошли первый круг, у каждого ребенка стало по одной монетке. У нас же на три монетки убавилось. Из 15 бусинок, отложенных на счетах, сбрасываем три. После каждого следующего круга у каждого ребенка прибавляется по одной монетке, а у нас становится на три монетки меньше. Значит, всякий раз, завершая круг, мы должны сбросить на счетах по 3 бусинки. Когда мы проходим 5 кругов, монетки у нас заканчиваются и все бусинки на счетах сброшены. В результате, каждому ребенку досталось по 5 монеток. Значит, если 15 копеек поделить на 3 одинаковые кучки, то в каждой кучке окажется по 5 копеек (и если за 3 конфеты заплатили 15 копеек, то каждая конфета стоит 5 копеек). Тут важно понимать, что, решая эту задачу, мы от копеек отнимаем именно копейки, а вовсе не конфеты.

Задача 1.6.3a. Купили 30 конфет, заплатив за покупку 150 копеек. Сколько стоит одна конфета?

Повторяем все рассуждения, которые позволили решить нам предыдущую задачу (как «формальные», так и более наглядные). Получаем:

$$150/30 = 15/3 = 5$$

Здесь мы опять имеем дело с делением нацело. Поэтому тут снова работает правило, по которому мы можем зачеркивать у чисел, стоящих по разные стороны от знака деления, по одинаковому количеству нулей.

* * *

Чтобы получше уяснить себя смысл деления нацело, давайте возьмем 15 монеток и выстроим их в три ряда по пяти монеток в каждом:

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

так чтобы было наглядно видно, что $15 = 5 \cdot 3$. А теперь поделим 15 на 3, то есть вычислим $15/3$. Для этого мы будем отнимать отсюда один из другим столбцы, в каждом из которых, как мы видим, находится по три монеты. Сколько раз мы это сможем сделать, таким и окажется результат наших вычислений. Таким образом, результат деления $15/3$ — это не что иное, как ответ на вопрос: *сколько здесь столбцов*?

Вместе с тем на практике деление удобнее представлять себе не как многократное вычитание, а как разбиение на равные части. В данном случае 15 монеток у нас уже разделены на 3 одинаковых ряда. Для того чтобы вычислить $15/3$, надо просто ответить на вопрос: *сколько монеток в каждом ряду*?

По-разному представляя себе деление, мы пришли к двум разным вопросам: во-первых, «Сколько здесь столбцов?», а во-вторых, «Сколько монеток в ряду?» Но по сути дела здесь спрашивается об одном и том же, и ответ в обоих случаях одинаков, а именно — пять.

В ходе наших рассуждений мы попутно установили одно очень важное совместное свойство умножения и деления. Если 5 вначале умножить на 3, а потом поделить на 3, то в результате снова получится 5. В самом деле:

$$5 \cdot 3 = 15$$
$$15/3 = 5$$

Также нетрудно видеть, что, если 15 поделить на 3, а потом умножить на 3, то снова получится 15:

$$15/3 = 5$$
$$5 \cdot 3 = 15$$

Эти утверждения остаются, разумеется, справедливы для любой другой тройки чисел, связанных между собой подобным же образом операциями деления и умножения. Кратко это можно сформулировать так: умножение и деление на одно и то же число взаимно отменяют друг друга.

* * *

Итак, мы теперь знаем, что такое деление нацело и деление с остатком. Это самые простые разновидности деления. Однако в математике они играют далеко не самую главную роль. Но прежде чем познакомиться с самым распространенным, самым важным типом деления, мы должны еще усвоить кое-какие математические идеи. Эти идеи с непривычки могут показаться довольно сложными. Мы, конечно, постараемся рассказать о них как можно проще и понятнее. Поэтому первое время мы будем иллюстрировать их главным образом примерами на сложение и вычитание. Это не значит, что про умножение и деление можно полностью забыть и бросить в них практиковаться. После некоторого перерыва мы снова начнем постоянно иметь дело с умножением и делением. Мы встретимся с ними тогда как со старыми, добрыми знакомыми и, уж во всяком случае, не будем тратить драгоценное время на тупое заучивание таблицы умножения.

Конспект

1. Сколько конфет куплено, если одна конфета стоит 5 копеек, а за всю покупку уплачено 15 копеек? Чтобы решить эту задачу, мы должны посчитать, сколько раз из числа 15 надо вычесть число 5, чтобы получить 0 или, как еще говорят, поделить 15 на 5. Коротко это решение записывается в виде $15/5 = 3$. Такая операция с числами 15 и 5 называется делением нацело.

2. При делении нацело «круглых» чисел (т.е. чисел, оканчивающихся на ноль) можно у каждого из них зачеркнуть справа по одинаковому количеству нулей.

3. Ноль, поделенный на любое число, кроме нуля, равен нулю. На сам же ноль делить нельзя.

4. Сколько бы раз мы ни вычитали число 5 из числа 17, нуль мы не получим. Говорят, что 17 не делится нацело на 5. Для этих чисел, однако, определено *деление с остатком*. Так называется решение задачи: Сколько конфет стоимостью 5 копеек можно купить на 17 копеек и сколько денег останется? Краткая запись решения: $17 : 5 = 3$ (ост. 2), или же $17 = 5 \cdot 3 + 2$. Когда мы делим с остатком круглые числа, нули зачеркивать нельзя.

5. Сколько стоит одна конфета, если за 3 конфеты заплатили 15 копеек? Чтобы решить это задачу, надо 15 копеек поделить на три равные части, например, между тремя детьми. На первом круге даем каждому ребенку по копейке, при этом у нас становится на 3 копейки меньше. На втором круге снова даем каждому по копейке. И так далее, пока у нас деньги не кончатся. В результате каждый получает столько копеек, сколько всего кругов. Задача свелась к делению нацело: $15/3 = 5$.

6. Умножение и деление на одно и то же число взаимно отменяют друг друга.

Задачи (в дополнение к примерам на деление)

1.6.4. Заполнить пропуски подходящими числами:

$7 \cdot \_\_ = 21$ $\qquad$ $\_\_/6 = 5$ $\qquad$ $\_\_ : 5 = 4$ (ост. 3)

$\_\_ \cdot 8 = 32$ $\qquad$ $18/\_\_ = 2$ $\qquad$ $20 : \_\_ = 3$ (ост. 2) $\quad$ и т. п.

1.7. Сложение и вычитание «столбиком»

Как мы знаем, любое число можно записать с помощью десяти значков, которые называются (арабскими) *цифрами*. Это значит, что для выполнения любых письменных заданий по математике не нужно уметь считать больше, чем до десяти. Пусть нам, например, дано задание пересчитать огромное число песчинок, высыпанных на стол. Мы отсчитываем десять песчинок и складываем их в одну кучку. Потом отсчитываем еще десять песчинок и складываем их в другую кучку. И так далее, и так далее, пока только можно. Оставшиеся песчинки, не попавшие ни в одну из кучек (если такие будут), отодвигаем на дальний конец стола, чтобы не мешались. Перед нами остались только кучки-десятки. Их-то мы и начинаем пересчитывать. И принимаемся мы за дело точно так же, как и тогда, когда перед нами была лишь большая россыпь отдельных песчинок. Отсчитав десять кучек-десятков, мы собираем их в одну кучку побольше — кучку-сотню. Потом делаем еще одну кучку-сотню и так далее, пока можно. Лишние кучки-десятки, не вошедшие ни в одну кучку-сотню (если такие будут), отодвигаем на дальний конец стола. Теперь приступаем к пересчету кучек-сотен. И так далее, и так далее — по уже знакомой схеме. Всякий раз мы имеем дело со всё более и более крупными кучками. Рано или поздно мы добьемся того, что кучек перед нами окажется меньше десяти. Теперь осталось заполнить следующую таблицу:

Кучки-миллионы (разряд миллионов)	Кучки — сотни тысяч (разряд сотен тысяч)	Кучки — десятки тысяч (разряд десятков тысяч)	Кучки-тысячи (разряд тысяч)	Кучки-сотни (разряд сотен)	Кучки-десятки (разряд десятков)	Отдельные песчинки (разряд единиц)

В самую правую колонку надо занести количество отдельных песчинок, не попавших ни в какие кучки. По-научному, эта колонка таблицы называется *разрядом единиц*. Говорят также, что это самый младший разряд числа. Во вторую колонку справа (*разряд десятков*) следует поставить количество кучек-десятков. И так далее. При необходимости, слева к таблице можно приписать еще любое количество столбцов (старших разрядов), и не так уж важно, как они называются. Если же столбцов, наоборот, окажется слишком много, то лишние столбцы слева можно стереть. Задание по пересчету песчинок выполнено.

Теперь рассмотрим, как можно сложить два больших числа, не пользуясь счетами. Допустим, к 1234 песчинкам требуется прибавить 2345 песчинок. Заносим оба числа в таблицу:

	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы
1-е слагаемое	1	2	3	4
2-е слагаемое	2	3	4	5

Поскольку мы собрались складывать эти числа, то и назвали мы их слагаемыми. Сложим по отдельности содержимое каждого разряда: единицы с единицами, десятки с десятками, сотни с сотнями, тысячи с тысячами, — и получим ответ:

	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы
1-е слагаемое	1	2	3	4
2-е слагаемое	2	3	4	5
Сумма	3	5	7	9

Заметим, что результат сложения по-научному называется *суммой*. Таким образом,

$$1234 + 2345 = 3579.$$

К сожалению, не всегда всё получается так просто. Пусть надо вычислить

$$5678 + 6789.$$

Заносим слагаемые в таблицу, складываем по отдельности каждый разряд и получаем:

	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы
1-е слагаемое	5	6	7	8
2-е слагаемое	6	7	8	9
Сумма	11	13	15	17

Прямо скажем, вышло плохо. Вот, к примеру, в самом младшем разряде оказалось 17 песчинок. Из такого количества песчинок можно сделать одну полновесную кучку-десяток, и место этой кучке-десятку — в следующем по старшинству разряде. Придется переписать таблицу в другом виде, формируя по мере надобности новые кучки и сразу помещая их в правильный разряд. После этого остается еще раз выполнить сложение внутри каждого разряда, и только тогда получится правильный ответ:

<table>
<tr><td></td><td>Десятки тысяч</td><td>Тысячи</td><td>Сотни</td><td>Десятки</td><td>Единицы</td></tr>
<tr><td>1-е слагаемое</td><td></td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>2-е слагаемое</td><td></td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Вспомогательные строки</td><td>

1</td><td>

1
1</td><td>
1
3
</td><td>1
5

</td><td>7

</td></tr>
<tr><td>Сумма</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td></tr>
</table>

Ну что ж, в принципе, так делать можно, но давайте подумаем, нельзя ли обойтись более короткой записью. Давайте еще раз сложим числа 5678 и 6789 и постараемся быть по возможности краткими. Ну, во-первых, нет никакой необходимости так тщательно разлиновывать таблицу и выписывать заголовки столбцов и строк. Напишем слагаемые просто так:

$$+\begin{array}{cccc} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Проделаем сперва сложение в разряде единиц:

$$+\begin{array}{cccc} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline & & 1 & 7 \end{array}$$

В результате такого сложения у нас образовалась дополнительная кучка-десяток, которую мы и записали в подходящий для нее разряд. Теперь, когда мы будем складывать кучки-десятки, мы учтем и эту дополнительную кучку тоже: 7 десятков $+\ 8$ десятков $= 15$ десятков; 15 десятков $+\ 1$ десяток $= 16$ десятков; 16 десятков $= 1$ сотня $+\ 6$ десятков. Значит, следует написать:

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 6 & 7 & 8\\ + & 6 & 7 & 8 & 9\\ \cline{2-5} & & & 1 & 7\\ & & 1 & 6 & \end{array}$$

Подобным же образом, вновь образованную кучку-сотню мы учитываем при выполнении сложения в разряде сотен:

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 6 & 7 & 8\\ + & 6 & 7 & 8 & 9\\ \cline{2-5} & & & 1 & 7\\ & & 1 & 6 & \\ & 1 & 4 & & \end{array}$$

Наконец, осталось сложить всё, что оказалось в разряде тысяч (и, ради красоты, написать еще раз единицу из самого старшего разряда строчкой ниже):

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 6 & 7 & 8\\ + & 6 & 7 & 8 & 9\\ \cline{2-5} & & & 1 & 7\\ & & 1 & 6 & \\ & 1 & 4 & & \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & & & \end{array}$$

Ответ-то мы получили, это число 12467, но записано оно как-то неудобно — лесенкой, идущей снизу вверх. Уж лучше писать лесенкой промежуточные результаты. Вот что получается, например, после сложения единиц:

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 6 & 7 & 8\\ + & 6 & 7 & 8 & 9\\ \cline{2-5} & & & 1 & \\ & & & & 7 \end{array}$$

Продолжая писать такие маленькие лесенки, мы получим конечный ответ в виде:

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 6 & 7 & 8\\ + & 6 & 7 & 8 & 9\\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 7 \end{array}$$

Это уже гораздо красивее. Однако и этом пути нас ожидают мелкие неудобства. Пусть надо сложить числа 5172 и 9284. Начинаем, как обычно, с разряда единиц:

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 1 & 7 & 2\\ + & 9 & 2 & 8 & 4\\ \cline{2-5} & & & & 6 \end{array}$$

Очередь за разрядом десятков. Складываем 7 и 8 и получаем 15. Ну, и куда теперь писать цифру 1, куда цифру 5? Мы же забыли оставить под чертой свободную строчку, откуда должны начинаться лесенки! Но, конечно, мы не будем ничего зачеркивать и переделывать. Мы просто запишем цифру 1 на самый верх таблицы. Важно лишь то, чтобы она попала в правильный разряд:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & & \\
+ & & 5 & 1 & 7 & 2 \\
 & & 9 & 2 & 8 & 4 \\
\hline
 & & & & 5 & 6
\end{array}$$

Теперь вычисления легко довести до конца:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & & 1 & & \\
+ & & 5 & 1 & 7 & 2 \\
 & & 9 & 2 & 8 & 4 \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & 5 & 6
\end{array}$$

Наконец-то всё стало хорошо! Но можно сделать еще лучше. На самом верху всё равно ничего, кроме единичек, стоять не может. А значит, вовсе не обязательно эти единички так уж тщательно выписывать. Достаточно вместо этих единичек ставить небольшие аккуратные точки. Вот так:

$$\begin{array}{cccccc}
 & \cdot & & \cdot & & \\
+ & & 5 & 1 & 7 & 2 \\
 & & 9 & 2 & 8 & 4 \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & 5 & 6
\end{array}$$

Теперь мы всё знаем про то, как складывать «в столбик»! Осталось только тренироваться и тренироваться, чтобы научиться это делать быстро и без ошибок.

Пора осваивать вычитание. Пусть требуется вычислить

$$3579 - 1234.$$

Заготавливаем табличку:

$$\begin{array}{ccccc}
- & 3 & 5 & 7 & 9 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
\end{array}$$

Проделываем вычитание в каждом разряде по отдельности и получаем ответ:

$$\begin{array}{ccccc}
- & 3 & 5 & 7 & 9 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}$$

Ну а если из числа 12467 требуется вычесть число 5678? Начинаем как обычно:

$$\begin{array}{cccccc}
- & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 \\
 & & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
\end{array}$$

М-да… Ситуация в разряде единиц складывается очень неприятная. Из семи надо вычитать восемь. Но у нас уже есть кое-какой опыт. Мы знаем, как следует выходить из такого положения. Надо разбить кучку-десяток на отдельные песчинки, и всё тогда встанет на свои места. Записать это можно так:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & {\scriptstyle 10} \\
- & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 \\
 & & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
 & & & & {\scriptstyle -1} &
\end{array}$$

Теперь вычисления в разряде единиц можно проделать очень легко: $10+7 = 17$; $17-8 = 9$. Заносим получившуюся девятку в таблицу:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & {\scriptstyle 10}\\
- & 1 & 2 & 4 & 6 & 7\\
 & & 5 & 6 & 7 & 8\\ \hline
 & & & & {\scriptstyle -1} & \\
 & & & & & 9
\end{array}$$

Переходим к разряду десятков. Здесь нас тоже ожидает неприятность. Из шести надо вычесть семь, а потом вычесть еще одну единицу. Повторяем трюк с разбиением кучки из более старшего разряда:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10}\\
- & 1 & 2 & 4 & 6 & 7\\
 & & 5 & 6 & 7 & 8\\ \hline
 & & & {\scriptstyle -1} & {\scriptstyle -1} & \\
 & & & & & 9
\end{array}$$

В разряде десятков теперь имеем: $10 + 6 = 16;\ \ 16 - 7 = 9;\ \ 9 - 1 = 8$. Продолжаем так дальше и в конце концов получаем:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10}\\
- & 1 & 2 & 4 & 6 & 7\\
 & & 5 & 6 & 7 & 8\\ \hline
 & {\scriptstyle -1} & {\scriptstyle -1} & {\scriptstyle -1} & {\scriptstyle -1} & \\
 & & 6 & 7 & 8 & 9
\end{array}$$

Всё бы хорошо, да только мы уже знаем, что подобная форма записи может привести к некоторым неудобствам. Попробуем вычислить

$$14456 - 5172.$$

В разряде единиц ситуация складывается очень удачно:

$$\begin{array}{cccccc}
- & 1 & 4 & 4 & 5 & 6\\
 & & 5 & 1 & 7 & 2\\ \hline
 & & & & & 4
\end{array}$$

Переходим к вычислениям в разряде десятков. А здесь не всё так уж гладко. Придется записать так:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & {\scriptstyle 10} & \\
 & & & {\scriptstyle -1} & & \\
- & 1 & 4 & 4 & 5 & 6\\
 & & 5 & 1 & 7 & 2\\ \hline
 & & & & 8 & 4
\end{array}$$

Доводим вычисления до конца и получаем:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & {\scriptstyle 10} & & {\scriptstyle 10} & \\
 & {\scriptstyle -1} & & {\scriptstyle -1} & & \\
- & 1 & 4 & 4 & 5 & 6\\
 & & 5 & 1 & 7 & 2\\ \hline
 & & 9 & 2 & 8 & 4
\end{array}$$

Но, конечно, эту запись хорошо бы еще сократить. Вовсе необязательно выписывать в верхней части таблички такие лесенки:

$$\begin{array}{cc}
 & {\scriptstyle 10}\\
{\scriptstyle -1} &
\end{array}$$

Всё это сооружение можно заменить на одну-единственную точку, которую удобно записать на месте «-1». В результате получается:

$$
\begin{array}{c c c c c c}
 & \cdot & & \cdot & & \\
- & 1 & 4 & 4 & 5 & 6\\
 & & 5 & 1 & 7 & 2\\ \hline
 & & 9 & 2 & 8 & 4
\end{array}
$$

Таким образом, точка наверху таблицы как бы разбивает кучку своего разряда на десять кучек более младшего разряда.

В качестве заключительного примера вычислим $1000 - 1$:

$$
\begin{array}{c c c c c}
- & 1 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & 1\\ \hline
\end{array}
$$

Здесь, для того чтобы выполнить вычитание в разряде единиц, надо бы разбить кучку-десяток на отдельные песчинки, но и кучек-десятков у нас нет. Не беда! Мы немножко сфокусничаем. Сейчас мы как бы из воздуха позаимствуем одну кучку-десяток, но зато потом, когда мы будем проводить вычисления в разряде десятков, надо будет обязательно позаимствованную кучку вернуть. Смело ставим точку в разряд десятков. В разряде единиц получаем: $10 + 0 = 10;\ 10 - 1 = 9$:

$$
\begin{array}{c c c c c}
 & & & \cdot & \\
- & 1 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & 1\\ \hline
 & & & & 9
\end{array}
$$

Пришло время разбираться с разрядом десятков. Здесь у нас есть ноль кучек, да еще одну кучку надо вернуть, о чем нам напоминает точка сверху. Ставим точку в разряд сотен и не задумываемся о том, разбивается ли при этом на десять кучек настоящая кучка-сотня или такая кучка заимствуется «из воздуха». Теперь в разряде десятков у нас есть десять кучек. Одну из них возвращаем, остается девять:

$$
\begin{array}{c c c c c}
 & & \cdot & \cdot & \\
- & 1 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & 1\\ \hline
 & & & 9 & 9
\end{array}
$$

Дальнейшие действия никакой сложности не представляют. Окончательный результат таков:

$$
\begin{array}{c c c c c}
 & \cdot & \cdot & \cdot & \\
- & 1 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & 1\\ \hline
 & & 9 & 9 & 9
\end{array}
$$

Теперь и про вычитание нам всё известно. Осталось нарабатывать навык.

Конспект

1. *Как определить, сколько песчинок в горсти песка, умея считать только до десяти?* Объединяем песчинки в кучки по десять. Оставшиеся песчинки, не попавшие ни в одну из кучек, отодвигаем прочь. Здесь мы их пересчитываем, после чего записываем на бумаге результат пересчета (число в пределах от 0 до 9): это *разряд единиц*.

Укрупняем кучки, сливая каждые десять кучек поменьше в одну кучку побольше. Оставшиеся маленькие кучки, не попавшие ни в одну большую, отодвигаем прочь. Тут мы их пересчитываем и записываем полученное число на бумаге слева от предыдущего числа: это *разряд десятков*.

Повторяя эти действия со всё более и более крупными кучками, получаем следующие разряды: *сотни*, *тысячи*, *десятки тысяч*, *сотни тысяч*, *миллионы* и так далее (название всех разрядов знать не обязательно). Останавливаемся, когда все песчинки оказались отодвинуты прочь.

2. *Сложение двух чисел столбиком*. К первому числу приписываем снизу второе число, так чтобы одинаковые разряды оказались друг под другом. Еще ниже резервируем строку для ответа. Складываем единицы с единицами и записываем результат в строку ответа под разрядом единиц. Если результат больше девяти, то записываем только последнюю цифру, а вверху, над разрядом десятков, ставим точку.

Складываем десятки с десятками. Если вверху, над разрядом десятков, стоит точка, то прибавляем единицу. Записываем результат внизу, под разрядом десятков, — но опять-таки только последнюю цифру, а если результат больше девяти, то ставим точку над разрядом сотен.

Продолжаем точно так же со всеми остальными разрядами. Если при сложении самого старшего разряда мы поставили сверху точку, то переносим ее в стоку ответа в виде единицы.

3. *Вычитание двух чисел столбиком*. К первому числу приписываем снизу второе число, так чтобы одинаковые разряды оказались друг под другом. Вычитаем из единиц единицы. Если при этом оказывается, что мы из меньшего числа должны вычитать большее, то добавляем к первому числу десять, а сверху, над разрядом десятков, ставим точку. Результат записываем снизу под разрядом единиц.

Вычитаем из десятков десятки. Если вверху, над разрядом десятков, стоит точка, вычитаем дополнительно единицу. Если при этом получается, что мы из меньшего числа должны вычитать большее, прибавляем к первому числу десять, а сверху, над разрядом сотен, ставим точку. Записываем результат внизу под разрядом десятков.

Продолжаем точно так же со всеми остальными разрядами.