3. Умножение и деление

3.1. Операция умножения и ее свойства

В прошлый раз, когда речь шла об операторах, мы особо отмечали, что оператор, сам по себе, — это вещь совершенно бессмысленная. Это всего лишь заготовка, которая превращается в полноценное выражение, только если заполнить подобающим образом прилагаемые к нему «свободные» места.

Но, как вы, вероятно, помните, в самом начале я говорил очень похожие вещи о числах. В природе такой вещи, как «число», не существует. Число, само по себе, ничего не значит. Если сказать просто «три», то получится какая-то чушь, ерунда, бессмыслица. Числа обретают смысл только тогда, когда за ними идут другие слова: «три котенка», «три поросенка», «три ребенка».

Так не является ли всякое число, взятое само по себе, безо всяких знаков арифметических действий, не чем иным, как оператором?

Именно так! Операция, которая задается этим оператором, называется *умножением*. Действительно, возьмем любую вещь — например, карандаш, — и подействуем на нее оператором 3. Получаем:

$$3 \text{ карандаша} = \text{карандаш} + \text{карандаш} + \text{карандаш}.$$

В точности так мы и определяли раньше умножение.

Разумеется, оператором умножения можно действовать не только на карандаши, но и вообще на всё, что поддается пересчету, — как на реальные предметы, так и на абстрактные понятия, включая числа. Мы можем сказать: «3 табуретки», «3 ежа», «3 вечера», «3 двойки» и так далее. Поскольку мы уже имели дело с переменными, мы знаем, что ту вещь, на которую действует наш оператор, можно представить в виде какой-нибудь буквы, например буквы k. Получается:

$$3k = k + k + k.$$

Но ведь и вместо тройки может стоять любое другое число. Обозначим его буквой a. Получим:

$$ak.$$

Так выглядит операция умножения в самом общем виде. Забегая вперед, скажу, что на месте буквы a — так же, как и на месте буквы k, — может стоять не только число, но и вообще всякая вещь. Но пока под буквой a, то есть под первым сомножителем, мы будем подразумевать только число. Впрочем, оно не обязательно должно быть положительным. Мы уже знакомы с такими понятиями, как, например, минус три коровы. Условимся записывать это в таком виде:

$$(-3) \text{ коровы} = -\text{корова} - \text{корова} - \text{корова}.$$

Это, по сути дела то же самое, что и

$$-(3 \text{ коровы}) = -(\text{корова} + \text{корова} + \text{корова}).$$

Не будет ошибкой записать это и так:

$$3(-\text{корова}) = (-\text{корова}) + (-\text{корова}) + (-\text{корова}).$$

Но уж если на месте буквы k может стоять корова со знаком минус, то уж отрицательное число там может стоять и подавно. Например:

$$3(-4) = (-4) + (-4) + (-4).$$

Так же возможен случай, когда оба сомножителя — отрицательные числа:

$$(-3)(-4) = -(-4) - (-4) - (-4) = 4 + 4 + 4.$$

Выпишем теперь в общем виде правила умножения с участием отрицательных чисел (дополнив их, для полноты картины, правилами умножения на единицу и на ноль):

$$\boxed{\begin{aligned} (-a)k &= -(ak) \\ a(-k) &= -(ak) \\ (-a)(-k) &= ak \\ 1k &= k \\ a \cdot 1 &= a \\ 0k &= a \cdot 0 = 0 \end{aligned}}$$

Здесь подразумевается, что a — положительное число, в то время как k — это либо положительное число, либо какая-то вещь. Однако все эти равенства остаются справедливыми, даже если не требовать положительности a и k.

В случае, когда оба сомножителя представляют собой положительные числа, возникает небольшая неприятность, от которой, впрочем, очень легко избавиться. Попробуем, например, подействовать оператором умножения 3 на число 4:

$$34$$

И как же теперь отличать выражение «три умножить на четыре» от числа «тридцать четыре»? Для начала заметим, что мы тут нарушили наше общее правило, согласно которому, действуя оператором умножения $3(\ldots)$ на число 4, мы должны были бы сохранить скобки:

$$3(4)$$

Хотя подобная запись и не содержит ошибки, писать так на самом деле не принято, а чтобы избежать путаницы, между двумя числовыми сомножителями ставят небольшую приподнятую точку:

$$3 \cdot 4.$$

Действительно, раз уж мы говорим об умножении как об операции, нам неплохо бы иметь специальный символ для обозначения бинарного оператора умножения. Помимо приподнятой точки

$$(\ldots) \cdot (\ldots)$$

которая, прямо скажем, выглядит в этой роли не очень солидно, для этой цели часто применяется косой крестик

$$(\ldots) \times (\ldots)$$

Впрочем, приподнятую точку «$\cdot$» очень легко перепутать с обычной точкой, какую мы обычно ставим в конце предложений. Точно так же, косой крестик «$\times$» слишком уж похож на латинскую букву икс «x» (и русскую «ха»). Особенно бы часто путаница возникала, если бы символы «$\cdot$» и «$\times$» находились бы наряду с символами «.» и «x» на одной и той же клавиатуре компьютера. Поэтому их там и нет. Вместо них имеется клавиша с изображением звездочки «$*$». Поэтому теперь в качестве знака умножения всё чаще и чаще стала применяться именно звездочка:

$$(\ldots) * (\ldots)$$

Поговорим теперь о свойствах умножения. И начнем мы, как ни странно, с того, что внимательно посмотрим на обычный пример на сложение:

$$3 + 2 = 5.$$

Поскольку числа сами по себе ничего не значат, на самом деле за этим примером может стоять что-то вроде:

$$3 \text{ конфеты} + 2 \text{ конфеты} =$$
$$(\text{конфета} + \text{конфета} + \text{конфета}) + (\text{конфета} + \text{конфета}) =$$
$$5 \text{ конфет}.$$

На практике мы, однако, уже привыкли вначале складывать числа сами по себе, а «конфеты» приписывать уже потом:

$$3 \text{ конфеты} + 2 \text{ конфеты} =$$
$$(3 + 2) \text{ конфет} =$$
$$5 \text{ конфет}.$$

Приглядимся повнимательнее к первому равенству из этой цепочки:

$$3 \text{ конфеты} + 2 \text{ конфеты} = (3 + 2) \text{ конфет}.$$

Здесь вместо конфет может стоять что угодно, да и числа могут быть другими. Поэтому мы можем написать в общем виде:

$$ak + bk = (a + b)k,$$

где a и b — произвольные целые числа, а k — как и раньше, либо целое число, либо вообще любая вещь. Мы получили очень важное равенство (точнее, тождество), которое в школе называется *распределительным свойством умножения*. По-научному же, это свойство называется *дистрибутивностью*.

Проверим это равенство на каком-нибудь числовом примере. Пусть $a = 3, b = 2, k = 7$. Тогда

$$ak + bk = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 21 + 14 = 35.$$

В то же время,

$$(a + b)k = (3 + 2) \cdot 7 = 5 \cdot 7 = 35.$$

Как и следовало ожидать, результаты в обоих случаях совпадают. Кстати, давайте обратим внимание на порядок выполнения действий (то есть операций). В выражении

$$3 \overset{[1]}{\cdot} 7 \overset{[3]}{+} 2 \overset{[2]}{\cdot} 7$$

в первую очередь выполняются операции умножения, а операция сложения — во вторую (как показывают красные числа в квадратных скобках). Говорят, что операция умножения имеет приоритет (первоочередность) по отношению к операции сложения. Если мы хотим изменить такой порядок выполнения действий, то мы должны воспользоваться скобками. Именно поэтому в выражении

$$(3 + 2) \cdot 7$$

скобки совершенно нелишни. Если бы здесь скобок не стояло, то вычисления следовало бы проводить так:

$$3 + 2 \cdot 7 = 3 + 14 = 17.$$

Как видно, результат оказывается совершенно другим. Само собой разумеется, что по отношению к операции вычитания умножение также имеет приоритет.

Дистрибутивность умножения широко применяется для упрощения всевозможных вычислений. Пусть, например, требуется вычислить:

$$4 \cdot 987 + 6 \cdot 987.$$

Тот, кто знает про дистрибутивность, может сделать это буквально в два счета:

$$4 \cdot 987 + 6 \cdot 987 = (4 + 6) \cdot 987 = 10 \cdot 987 = 9870.$$

Поскольку a и b могут быть отрицательными, дистрибутивность с равным успехом может применяться также в случае разности:

$$18 \cdot 987 - 17 \cdot 987 = (18 - 17) \cdot 987 = 1 \cdot 987 = 987.$$

Наконец, число слагаемых вовсе необязательно должно равняться двум. Их может быть сколь угодно много:

$$1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 - 4 \cdot 10 = (1 + 2 + 3 - 4) \cdot 10 = 2 \cdot 10 = 20.$$

Теперь приглядимся повнимательней к «чистым» примерам на умножение — в том виде, как мы к ним привыкли. Пусть, например, надо умножить три на два:

$$3 \cdot 2 = 6.$$

И снова мы вспоминаем, что под этой записью подразумевается кое-что вроде:

$$3 \cdot (2 \text{ конфеты}) =$$
$$2 \text{ конфеты} + 2 \text{ конфеты} + 2 \text{ конфеты} =$$
$$(2 + 2 + 2) \text{ конфет} =$$
$$(3 \cdot 2) \text{ конфет} =$$
$$6 \text{ конфет}.$$

Из всей этой цепочки особый интерес для нас представляет равенство

$$3 \cdot (2 \text{ конфеты}) = (3 \cdot 2) \text{ конфет}.$$

Вместо «конфет» здесь может стоять любая вещь или число. В общем виде, заменяя числа буквами, получаем:

$$a(bk) = (ab)k.$$

Или же, выписывая в явном виде оператор умножения:

$$a \cdot (b \cdot k) = (a \cdot b) \cdot k.$$

Это тождество в школьных учебниках носит название *сочетательное свойство умножения*, а профессиональные математики говорят: умножение *ассоциативно*.

Помните, мы когда-то говорили об ассоциативности сложения?

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

(Здесь c — еще одно произвольное целое число.) Зачем оно было нам нужно? От самой по себе ассоциативности сложения толку было мало, однако вместе с коммутативностью (переместительностью) —

$$a + b = b + a$$

— оно давало нам «официальное право» совершенно произвольно менять порядок вычислений в сумме, которая состоит из любого числа слагаемых. Точно так же, мы могли бы теперь менять порядок вычислений в произведении любого числа сомножителей, если бы установили, что операция умножения коммутативна. Однако с этим есть небольшая загвоздка. В общем виде мы записываем умножение так:

$$ak,$$

где а это целое число, а k может быть не только числом, но и любой другой вещью. Например,

три поросенка.

Если мы теперь переставим местами сомножители, то получится

поросенка три.

Согласно определению умножения, мы должны теперь взять «три» такое число раз которое равно «поросенку»! Полная чушь! Как тут быть?

Мы, конечно, могли бы договориться о том, чтобы придать этой чуши какой-то смысл. Мы могли бы условиться, что «поросенка три» — это в точности то же самое, что и «три поросенка». Именно так мы и поступим через некоторое время. Но пока мы сделаем оговорку, что нам разрешено переставлять местами только числа, оставляя «поросят» на месте:

$$3 \cdot (5 \text{ поросят}) = 5 \cdot (3 \text{ поросенка}).$$

Когда-то (а именно, главе 1.5) мы уже убеждались в верности этого равенства. Пользуясь ассоциативностью умножения, мы можем также написать:

$$(3 \cdot 5) \text{ поросят} = 3 \cdot (5 \text{ поросят}) = 5 \cdot (3 \text{ поросенка}) = (5 \cdot 3) \text{ поросят}.$$

Итак, под *коммутативностью* (переместительностью) умножения мы будем пока понимать любое из двух тождеств (которые вследствие ассоциативности умножения означают одно и то же):

$$3 \cdot (5 \text{ поросят}) = 5 \cdot (3 \text{ поросенка}),$$
$$(3 \cdot 5) \text{ поросят} = (5 \cdot 3) \text{ поросят}.$$

Сокращенно это записывается так:

$$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3.$$

Или, в общем виде:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

В школе это тождество называется *переместительным свойством умножения*.

Теперь мы обзавелись всеми необходимыми свойствами, чтобы утверждать, что произведение любого числа числовых сомножителей может вычисляться в совершенно любом порядке. Действительно, налицо полная аналогия со сложением. Сравните:

$$\begin{array}{ccc} a \cdot b = b \cdot a & \text{и} & a + b = b + a, \\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c & \text{и} & a + (b + c) = (a + b) + c. \end{array}$$

Мы знаем, что из коммутативности и ассоциативности сложения каким-то образом выводится, что слагаемые можно произвольным образом менять местами. Каким бы ни был этот вывод, мы можем заменить в нем всюду оператор сложения на оператор умножения — и мы получим аналогичное доказательство на случай умножения.

Изменение порядка сомножителей иногда очень сильно облегчает вычисления. Например:

$$5 \cdot 765 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 765 = 10 \cdot 765 = 7650.$$

Давайте выпишем свойства умножения еще раз и обведем их в рамочку. Для произвольных целых чисел a, b и c справедливы следующие тождества:

$$\boxed{\begin{aligned} ab &= ba && \text{(коммутативность)} \\ a(bc) &= (ab)c && \text{(ассоциативность)} \\ ac + bc &= (a+b)c && \text{(дистрибутивность)} \end{aligned}}$$

В заключение главы отмечу, что наше представление о числах теперь еще более расширилось. До сих пор целые числа были для нас, например, номерами ступенек или командами (операторами) передвижения по ступенькам. А теперь от нашего внимания не ускользнул тот факт, что числа могут еще выступать в роли операторов умножения. Так, число 3, приписанное слева к конфете, делает из одной конфеты сразу три конфеты, а приписанное к ступеньке, делает из одной ступеньки сразу три ступеньки. Если мы подействуем на самую первую ступеньку оператором умножения, то окажемся на ступеньке, номер который в точности совпадает с данным оператором. Например, подействовав на ступеньку номер 1 оператором умножения -5, мы окажемся на ступеньки номер $-5 \cdot 1 = -5$.

Конспект

1. Целые числа — это операторы умножения, которые множат предметы, переменные или числа, следующие за ними. Так, если подействовать оператором умножения 5 на карандаш, то мы получим 5 карандашей. Если подействовать тем же оператором на переменную a, получим $5a$. А если подействовать им на число 3, получим $5 \cdot 3$. Здесь знак умножения (точка) между 5 и 3 стоит для того, чтобы не путать произведение двух чисел с числом 53. В качестве знаков умножения применяются также косой крестик ($\times$) и звездочка ($*$).

2. Правила умножения отрицательных чисел и умножения на единицу и ноль:

$$\begin{aligned} (-a)k &= -(ak) \\ a(-k) &= -(ak) \\ (-a)(-k) &= ak \\ 1k &= k \\ a \cdot 1 &= a \\ 0k &= a \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Здесь подразумевается, что a и k — это положительные числа (но k может быть также вещью). Все эти равенства остаются верны и для произвольных целых чисел.

3. Свойства умножения:

$$\begin{aligned} ab &= ba && \text{(коммутативность)} \\ a(bc) &= (ab)c && \text{(ассоциативность)} \\ ac + bc &= (a+b)c && \text{(дистрибутивность)} \end{aligned}$$

Первые два свойства означают, что произведение любого числа сомножителей можно вычислять в произольном порядке.

3.2. Умножение «в столбик»

До сих пор мы умели только умножать на счетах в пределах 24×24. Настало время научиться перемножать бóльшие числа, и не на счетах, а на бумаге — с помощью процедуры, которая называется умножением «в столбик».

Надо честно признаться: умножение «в столбик» — это одна из самых неприятных и нудных вещей во всей математике. Хуже нее только деление «уголком», которым мы тоже вскоре займемся. Как только мы освоим умножение «в столбик» и деление «уголком», мы можем смело утверждать, что самый трудный участок на пути изучения математики у нас остался позади.

Прежде всего нам понадобится таблица умножения в пределах от 2×2 до 9×9. Удобнее всего ее записать в таком виде:

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Это так называемая таблица Пифагора. Здесь на пересечении строки, помеченной числом 3, и колонки, помеченной числом 5, стоит как раз произведение чисел $3\cdot 5$, то есть 15. Подобным же образом мы можем по этой таблице быстро найти произведение любых однозначных чисел (за исключением нуля и единицы, но умножать на ноль и единицу настолько легко, что никакая таблица не нужна).

В школе эту таблицу заставляют учить наизусть. На мой взгляд, в этом нет никакой необходимости. Пусть она просто будет под рукой, и этого совершенно достаточно. По мере того как мы будем практиковаться в умножении «в столбик», она выучится сама собой.

Таблицу умножения на отдельном листе (в формате pdf) можно взять здесь:

https://nekin.info/math/tablitsa_umnozheniya.pdf.

Итак, приступим к умножению чисел. Для начала научимся умножать многозначные числа (состоящие из нескольких цифр) на однозначные (состоящие из одной цифры) Пусть нам надо вычислить

$$6879\cdot 7.$$

Воспользовавшись свойствами умножения, которые мы проходили на прошлом уроке, мы можем написать:

$$6879\cdot 7 =$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
(9 & + & 7\cdot 10 & + & 8\cdot 100 & + & 6\cdot 1000)\cdot 7 & = \\
9\cdot 7 & + & 7\cdot 7\cdot 10 & + & 8\cdot 7\cdot 100 & + & 6\cdot 7\cdot 1000 & = \\
63 & + & 49\cdot 10 & + & 56\cdot 100 & + & 42\cdot 1000 & =
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
63 \\
+\quad 490 \\
+\ 5600 \\
+42000
\end{array}$$

Перепишем это в виде упрощенной таблицы (очень похожей на ту, какую мы писали, когда учились сложению столбиком):

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 6 & 8 & 7 & 9 \\
\times & & & & 7 \\
\cline{2-5}
 & & & 6 & 3 \\
 & & 4 & 9 & \\
 & 5 & 6 & & \\
4 & 2 & & &
\end{array}
$$

Теперь остается сложить числа под горизонтальной линией — и ответ готов:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 6 & 8 & 7 & 9 \\
\times & & & & 7 \\
\hline
 & & & 6 & 3 \\
 & & 4 & 9 & \\
 & 5 & 6 & & \\
4 & 2 & & & \\
\hline
4 & \overset{1}{8} & \overset{1}{1} & 5 & 3
\end{array}
$$

Надо ли пояснять, откуда взялись маленькие единички над нашим ответом? Когда мы в разряде десятков сложили 6 и 9, то получили 15. Последнюю цифру этого числа (то есть пятерку) мы записали в ответе в разряде десятков, а первую цифру этого числа (то есть единицу) перенесли в следующий разряд в виде маленькой приподнятой единички. Потом в разряде сотен мы стали складывать 4 и 6, и не забыли добавить сюда же эту самую единичку. Получившееся число 11 тоже записали наискосок: вторую единицу покрупнее и пониже (в аккурат в строке ответа), а первую единицу поменьше и повыше.

Мы теперь, в принципе, умеем умножать на однозначное число. Но давайте подумаем над усовершенствованиями. Во-первых, перепишем нашу табличку в более компактном виде:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 6 & 8 & 7 & 9 \\
\times & & & & 7 \\
\hline
4 & 5 & 4 & 6 & \\
 & 2 & 6 & 9 & 3 \\
\hline
4 & \overset{1}{8} & \overset{1}{1} & 5 & 3
\end{array}
$$

А во-вторых, подумаем над возможностью более радикального сокращения записи. Вернемся в исходное положение:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 6 & 8 & 7 & 9 \\
\times & & & & 7 \\
\hline
\end{array}
$$

В разряде единиц умножим 9 на 7. Результат 63 запишем, как и раньше, наискосок, но шестерку сделаем совсем маленькой:

$$\begin{array}{ccccc}
 & 6 & 8 & 7 & 9 \\
\times & & & & 7 \\ \hline
 & & & {\scriptstyle 6} & \\
 & & & & 3
\end{array}$$

Теперь умножим в разряде десятков 7 на 7. Получаем 49. Прибавляем сюда нашу «маленькую» шестерку: $49 + 6 = 55$. Этот результат опять записываем наискосок:

$$\begin{array}{ccccc}
 & 6 & 8 & 7 & 9 \\
\times & & & & 7 \\ \hline
 & & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 6} & \\
 & & & 5 & 3
\end{array}$$

Переходим к разряду сотен: $8 \cdot 7 + 5 = 61$. Записываем:

$$\begin{array}{ccccc}
 & 6 & 8 & 7 & 9 \\
\times & & & & 7 \\ \hline
 & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 6} & \\
 & & 1 & 5 & 3
\end{array}$$

И, наконец, в разряде тысяч получаем $6 \cdot 7 + 6 = 48$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & 6 & 8 & 7 & 9 \\
\times & & & & 7 \\ \hline
{\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 6} & \\
4 & 8 & 1 & 5 & 3
\end{array}$$

Здесь мы еще перенесли «маленькую» четверку в разряде десятков тысяч вниз, чтобы получить окончательный ответ. Не правда ли, наши вычисления стали короче, а запись еще более компактной?

Теперь возникает резонный вопрос. А как мы будем записывать эти вычисления в нашей тетрадке по математике, разлинованной в клетку? Будем ли мы писать «маленькие» цифры в отдельном ряду клеток или же втискивать их в тот же ряд клеток, где у нас записан ответ? Оба варианта не слишком хороши. Поэтому я предлагаю делать наши вычисления в столбик на отдельных листах бумаги. Для этого прекрасно подойдут обычные белые листы, какие используются для принтеров и копировальных машин. А тех, кому работать на линованной бумаге всё же привычнее, приглашаю воспользоваться листами с особой линовкой.

Лист со специальной линовкой для вычислений можно взять здесь (формат pdf):

https://nekin.info/math/kletka+.pdf.

Надо отметить, что в школе учат умножать «в столбик» несколько по-другому. Отличие состоит в том, что «маленькие» цифры не записывают на бумагу, а держат в уме — вероятно, по той именно причине, что в стандартных тетрадках в клетку их просто некуда записывать. На мой взгляд, это слишком усложняет процесс счета и только способствует ошибкам.

Переходим к умножению на двузначные числа. Пусть требуется вычислить

$$6879 \cdot 67.$$

Ну что ж, приступим.

$$6879 \cdot 67 =$$
$$6879 \cdot (\,7 + 6 \cdot 10\,) =$$
$$\begin{gathered} 6879 \cdot 7 \\ + \\ 6879 \cdot 6 \cdot 10 = \end{gathered}$$
$$\begin{array}{rr} & 63 \\ + & 490 \\ + & 5600 \\ + & 42000 \end{array}$$
$$+$$
$$\begin{array}{rr} & 540 \\ + & 4200 \\ + & 48000 \\ + & 360000 \end{array}$$

Здесь при умножении на 6 мы воспользовались тем же приемом, что и при умножении на 7, только к каждому получившемуся слагаемому приписали еще 0 из-за дополнительного умножения на 10. Сумму второй группы слагаемых находим точно так же, как раньше мы находили сумму первой группы слагаемых:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 6 & 8 & 7 & 9 \\
 & \times & & & 6 & 7 \\
\hline
 & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 6} & \\
 & 4 & 8 & 1 & 5 & 3 \\
{\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 5} & & \\
4 & 1 & 2 & 7 & 4 &
\end{array}$$

Складываем получившиеся ряды «больших» цифр и получаем окончательный ответ (при этом «маленькие» цифры можно зачеркнуть, чтобы не мешались):

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 6 & 8 & 7 & 9 \\
 & \times & & & 6 & 7 \\
\hline
 & \cancel{\scriptstyle 4} & \cancel{\scriptstyle 6} & \cancel{\scriptstyle 5} & \cancel{\scriptstyle 6} & \\
 & 4 & 8 & 1 & 5 & 3 \\
\cancel{\scriptstyle 4} & \cancel{\scriptstyle 5} & \cancel{\scriptstyle 4} & \cancel{\scriptstyle 5} & & \\
4 & 1 & 2 & 7 & 4 & \\
\hline
 & {\scriptstyle 1} & & & & \\
4 & 6 & 0 & 8 & 9 & 3
\end{array}$$

Подобным же образом делается умножение на трехзначные числа. Например:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 6 & 8 & 7 & 9 \\
 & & \times & & 2 & 6 & 7 \\
\hline
 & & \cancel{\scriptstyle 4} & \cancel{\scriptstyle 6} & \cancel{\scriptstyle 5} & \cancel{\scriptstyle 6} & \\
 & & 4 & 8 & 1 & 5 & 3 \\
 & \cancel{\scriptstyle 4} & \cancel{\scriptstyle 5} & \cancel{\scriptstyle 4} & \cancel{\scriptstyle 5} & & \\
 & 4 & 1 & 2 & 7 & 4 & \\
\cancel{\scriptstyle 1} & \cancel{\scriptstyle 1} & \cancel{\scriptstyle 1} & \cancel{\scriptstyle 1} & & & \\
1 & 3 & 7 & 5 & 8 & & \\
\hline
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & \\
1 & 8 & 3 & 6 & 6 & 9 & 3
\end{array}$$

Если в середине трехзначного числа стоит ноль, то запись выглядит так:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 6 & 8 & 7 & 9 \\
 & & \times & & 2 & 0 & 7 \\
\hline
 & & {\scriptstyle\cancel{4}} & {\scriptstyle\cancel{6}} & {\scriptstyle\cancel{5}} & {\scriptstyle\cancel{6}} & \\
 & & 4 & 8 & 1 & 5 & 3 \\
{\scriptstyle\cancel{1}} & {\scriptstyle\cancel{1}} & {\scriptstyle\cancel{1}} & {\scriptstyle\cancel{1}} & & & \\
1 & 3 & 7 & 5 & 8 & & \\
\hline
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & \\
1 & 4 & 2 & 3 & 9 & 5 & 3
\end{array}
$$

Наконец, умножение круглых чисел (которые оканчиваются нулями) записывается в таком виде:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & 6 & 8 & 7 & 9 & 0 & & \\
 & & \times & & 2 & 6 & 7 & 0 & 0 & \\
\hline
 & & {\scriptstyle\cancel{4}} & {\scriptstyle\cancel{6}} & {\scriptstyle\cancel{5}} & {\scriptstyle\cancel{6}} & & & & \\
 & & 4 & 8 & 1 & 5 & 3 & & & \\
 & {\scriptstyle\cancel{4}} & {\scriptstyle\cancel{5}} & {\scriptstyle\cancel{4}} & {\scriptstyle\cancel{5}} & & & & & \\
 & 4 & 1 & 2 & 7 & 4 & & & & \\
{\scriptstyle\cancel{1}} & {\scriptstyle\cancel{1}} & {\scriptstyle\cancel{1}} & {\scriptstyle\cancel{1}} & & & & & & \\
1 & 3 & 7 & 5 & 8 & & & & & \\
\hline
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & & & \\
1 & 8 & 3 & 6 & 6 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Конспект

1. *Таблица умножения* — это таблица, из которой можно узнать результаты умножения всех однозначных чисел друг на друга. (Умножение на единицу может быть опущено, так как результат в этом случае очевиден.)

2. *Умножение «в столбик» многозначного числа на однозначное.* К первому сомножителю — многозначному числу — приписываем снизу, под разрядом единиц, второй сомножитель — однозначный. Еще ниже резервируем две строки: первая, вспомогательная, — половинной высоты; вторая, предназначенная для ответа, — нормальной высоты.

Умножаем разряд единиц первого сомножителя на второй (однозначный) сомножитель — в результате получаем однозначное или двузначное число. Последнюю цифру этого числа пишем в строке ответа — под разрядом единиц. Предпоследнюю цифру (если она есть) записываем во вспомогательную строку в разряд десятков.

Умножаем разряд десятков первого сомножителя на второй сомножитель и прибавляем цифру, стоящую в разряде десятков во вспомогательной строке (если она там есть). В результате получаем однозначное или двузначное число. Последнюю цифру этого числа пишем в строке ответа в разряде десятков. Предпоследнюю (если она есть) — во вспомогательной строке в разряде сотен.

Продолжаем точно также со всеми остальными разрядами. Если при умножении самого старшего разряда мы поставили во вспомогательную строку какое-то число, то переносим его в строку ответа.

3. *Умножение «в столбик» двух многозначных чисел.* Первое число умножаем на каждый из разрядов второго числа — так, как мы это делали, когда умножали многозначное число на однозначное. Результаты записываем «в столбик» друг под другом со сдвигом согласно разряду, а затем складываем их.

4. При умножении друг на друга круглых чисел, оканчивающихся нулями, отбрасываем сперва конечные нули, а потом, получив окончательный результат, приписываем к нему справа столько нулей, сколько мы их первоначально отбросили.

3.3. Как учить таблицу умножения?

Вообще-то говоря, если поступать по-умному, то таблицу умножения учить не надо. В том смысле, что не надо учить ее *специально*. Достаточно иметь ее под рукой — и тогда она выучится сама собой от частого использования. К тому же, знание наизусть таблицы умножения не приводит к лучшему пониманию математики. Для усвоения материала совершенно всё равно — лежит ли таблица умножения перед нами на столе, или же находится у нас в голове, отложенная в памяти.

Но, если быть реалистом, то приходится признать, что дети учат математику не ради самой математики, а ради школьных отметок. Школьные учителя, как известно, — люди со странностями. Они почему-то не позволяют ученикам держать «бумажную» версию таблицы умножения всегда под рукой — в особенности во время контрольных работ по математике, то есть тогда, когда она больше всего нужна и когда она легче всего могла бы отложиться в памяти. Поэтому школьникам действительно приходится специально заучивать таблицу умножения наизусть (что, разумеется, отнюдь не способствует их любви к школе и к математике).

Возникает вопрос: как это можно сделать наименее дурацким способом?

Надо отметить, что к тому времени, когда возникает необходимость учить таблицу умножения, ребенок ее уже почти знает. Он может и не помнить назубок, сколько будет восемью семь, но если дать ему немножко подумать, то он из семидесяти отнимет в уме два раза по семь (или проделает что-то подобное) — и выдаст верный результат. (Если же он не в состоянии этого сделать, то пусть сначала потренируется умножать на счетах, как описано в уроке 1.5.) Вся проблема в том, что ему требуется пока еще слишком много времени и усилий на то, чтобы прийти к ответу. Задача, таким образом, состоит в том, чтобы получше накатать «дорожки», ведущие в его памяти к правильной цели. «Дорожки» же, как известно, накатываются оттого, что часто используются.

Что ж, приступим.

Упражнение 3.3.1. Для этого упражнения нам потребуется пустой бланк таблицы умножения, который можно взять здесь:

https://nekin.info/math/tablitsa_umnozheniya_blank.pdf.

Упражнение, как нетрудно догадаться, состоит в том, чтобы этот бланк заполнить. Таблица разделена на несколько областей разного цвета, для того чтобы ее ячейки не сливались в единообразную, унылую массу. Заполнять их можно в какой угодно последовательности. Если ребенок по ошибке поставит в какую-либо ячейку неправильное число, то мы потом выпишем соответствующий пример отдельно на бумагу и попросим ребенка пересчитать его еще раз.

Это упражнение имеет смысл делать один-два раза в день, засекая всякий раз потраченное время. Поначалу ребенок, если хочет, может пользоваться счетами. Потом от них, разумеется, следует отказаться. По мере наработки навыка, процесс пойдет всё быстрее. В идеале, время, которое тратится на работу головой, должно стать меньше, чем время, которое тратится на работу ручкой.

Хочу особо отметить один важный момент. Мы учим таблицу всю сразу и целиком (а не так, как это принято в школе, где вначале проходят умножение на двойку, потом на тройку и так далее). Это довольно общее правило, которое применимо всегда, когда мы хотим что-то выучить. Лучше изо дня в день повторять одно и то же одним большим куском, чем всякий раз заучивать разное и помаленьку. Главная проблема, собственно, не в том, чтобы выучить, а в том, чтобы потом не забыть.

Упражнение 3.3.2. Решаем примеры из таблицы умножения, взятые в случайном порядке:

https://nekin.info/math/tablitsa_umnozheniya_primery.pdf.

Здесь на каждой странице представлен полный набор примеров из таблицы, причем во всех возможных вариантах по образцу

$$6 \cdot 7 = 42, \qquad 7 \cdot 6 = 42, \qquad 42/6 = 7, \qquad 42/7 = 6.$$

Предполагается, что одну страницу надо делать за один присест, опять-таки засекая время и прибегая при необходимости к счетам. Если понадобятся дополнительные страницы с новым случайным расположением примеров, то их можно быстро создать в любом количестве с помощью файла-генератора «Примеры на знание таблицы умножения» из пункта 1 на странице «Упражнения и задачи»:

https://nekin.info/math/uprazhneniya_i_zadachi.htm.

Мнемонические трюки

Здесь уместно, пожалуй, упомянуть о мнемонических трюках, которые можно применять для заучивания таблицы умножения. Мнемоника — это особое искусство запоминания, которое было широко распространено в глубокой древности, когда еще не была изобретена письменность. В наше время мнемоника утратило свое практическая значение, потому что оказалось, что всё же гораздо удобнее записывать всю необходимую информацию на бумаге (или на электронном носителе), а потом заглядывать в эту запись по мере надобности. И только в школе, где на использование письменности наложены драконовские ограничения, до сих пор приходится иногда прибегать к мнемоническим трюкам. Главный недостаток мнемоники заключается в том, что знания, полученные с ее помощью, основаны не на понимании истинной сути вещей, а на поверхностных, случайных совпадениях. Например, мы можем заметить, что в следующей строке все цифры идут подряд в порядке возрастания:

$$\mathbf{12 = 3 \cdot 4;\ 56 = 7 \cdot 8.}$$

Это наблюдение, вероятно, поможет нам в следующий раз быстро вспомнить, сколько будет семью восемь, но никак не разовьет наших математических способностей..

Пожалуй, самый популярный мнемонический трюк — это стишки, в которых встроена информация, которую надо выучить. Чтобы легко запоминаться, стишки эти должны быть рифмованными и гладенькими, однако наличие глубокого смысла в них вовсе необязательно. Ниже я привожу пришедшие мне на ум стишки для запоминания таблицы умножения. Они расположены в том порядке, в каком, на мой взгляд, следовало бы учить таблицу умножения, если бы на это было отведено совсем немного времени. Прежде всего идут «синие» диагональные ячейки таблицы, поскольку они являются как бы хребтом для всего остального. Потом — «красные» ячейки как наиболее трудные. Затем — «зеленые» как вторые по сложности. Наконец — «желтые», получаемые умножением на девятку. Все «белые» ячейки настолько просты, что для них уж точно никаких стишков не понадобится. Поэтому для большинства из них никаких стишков и не предусмотрено. И без того тут полно совершенно лишних стишков, таких как для примеров «дважды два — четыре» и «пятью пять — двадцать пять».

$\mathbf{2 \cdot 2 = 4}$

Дважды два — четыре.
Дважды два — четыре.
Это всем известно в целом мире.
(М. Пляцковский)

$\mathbf{3 \cdot 3 = 9}$

Ты три-три на тёрке сыр,
Чтобы стёрлось девять дыр.

$\mathbf{4 \cdot 4 = 16}$

Четыре колонны, четыре ряда —
Всего шестнадцать, господа!

$\mathbf{5 \cdot 5 = 25}$

Птичку в поле не догнать.
Пять пятерок — двадцать пять!

$\mathbf{6 \cdot 6 = 36}$

Шестью шесть, прошу учесть,
Неизменно тридцать шесть.
(М. Пляцковский)

$\mathbf{7 \cdot 7 = 49}$

А в семь ноль семь, прошу поверить,
Соро́к слетелось со́рок девять.

$\mathbf{8 \cdot 8 = 64}$

Мы утерли носик
Дерзкому задире.
Восемь да на восемь —
Шестьдесят четыре.

$\mathbf{9 \cdot 9 = 81}$

А девять на девять, сказать по уму,
Равно аж восьми-десяти одному.

$\mathbf{7 \cdot 8 = 56}$

Сядем вместе пить и есть.
Семью восемь — пять и шесть.

$\mathbf{6 \cdot 8 = 48}$

У кого, друзья, ни спросим:
Шесть на восемь — сорок восемь.
(М. Пляцковский)

$\mathbf{6 \cdot 7 = 42}$

Шелестит с утра трава.
Шесть семерок — сорок два.

$\mathbf{5 \cdot 7 = 35}$

Сливы просьба не топтать!
Семь пятерок — тридцать пять.

$\mathbf{4 \cdot 8 = 32}$
Прячусь я в сортире
И дышу едва.
Восемь на четыре —
Это тридцать два.

$\mathbf{4 \cdot 7 = 28}$
Весть мы добрую разносим:
Семь четверок — двадцать восемь.
Вариант:
Дней много ли вьюги февральские пели?
Всего двадцать восемь — четыре недели.

$\mathbf{4 \cdot 6 = 24}$
Лежала тут шерсть,
  но ее кто-то стырил.
Четырежды шесть —
  это двадцать четыре.

$\mathbf{3 \cdot 8 = 24}$
Сколько это — три восьмерки?
Два десятка и четверка!

$\mathbf{3 \cdot 7 = 21}$
Рявкнул лысый господин:
«Три семерки — два-один!»

$\mathbf{3 \cdot 6 = 18}$
Это ж надо постараться!
Три шестерки — восемнадцать.

$\mathbf{3 \cdot 5 = 15}$
Мы нашли в апартаментах —
Трижды пять — пятнадцать центов.

$\mathbf{3 \cdot 4 = 12}$
Шли однажды по дрова
Три четверки — раз и два!

$\mathbf{3 \cdot 9 = 27}$
Я секрет вам выдам всем:
Трижды девять — двадцать семь.

$\mathbf{4 \cdot 9 = 36}$
Коль нету стула — негде сесть.
Четыре, девять — тридцать шесть.

$\mathbf{5 \cdot 9 = 45}$
Ни прибавить, ни отнять:
Пятью девять — сорок пять.

$\mathbf{6 \cdot 9 = 54}$
Потолок протек в квартире.

Шесть девяток — пять-четыре.

$\mathbf{7 \cdot 9 = 63}$
В корень ты, дружок, смотри.
Семью девять — шесть и три.

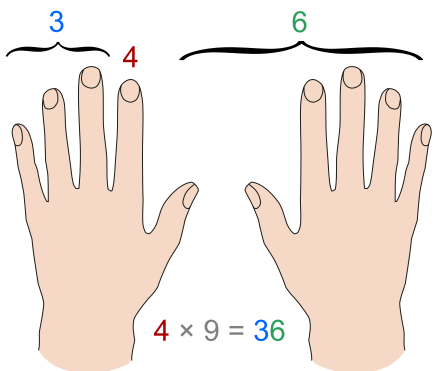
$\mathbf{8 \cdot 9 = 72}$
Смыслом ничуть не разнятся слова
«Восемью девять» и «семьдесят два».

Мнемоника на пальцах

Некоторые примеры из таблицы умножения можно быстро вычислить с помощью простых трюков с собственными пальцами.

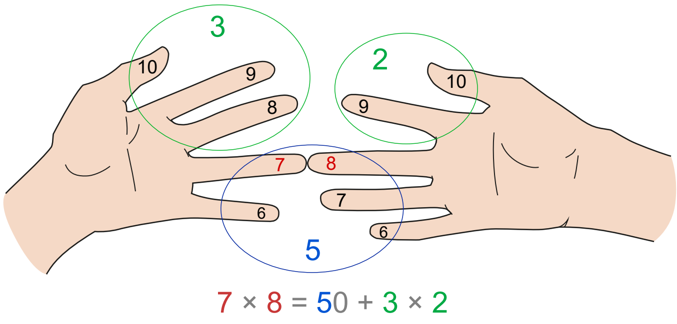
Трюк № 1. Умножение на 9. Допустим мы хотим вычислить произведение $4 \cdot 9$. Держим руки перед собой так, чтобы все десять пальцев выстроились в один ряд. Поскольку мы умножаем четверку, отсчитываем по порядку четвертый палец и направляем на него свое внимание. Можно даже слегка его согнуть. Спрашивается: сколько пальцев ему предшествует? Ответ: три. Пишем цифру 3 на бумаге. Следующий вопрос: сколько пальцев за ним следует? Ответ: шесть. Приписываем цифру 6 и получаем окончательный результат:

$$4 \cdot 9 = 36.$$



Трюк № 2. Вычисление $\mathbf{6 \cdot 8}$, $\mathbf{7 \cdot 7}$, $\mathbf{7 \cdot 8}$ и $\mathbf{8 \cdot 8}$. Допустим, мы хотим умножить 7 на 8. Держим руки перед собой ладонями к себе и пальцами друг к другу. Пересчитываем мысленно пальцы на обоих руках снизу вверх, начиная, однако, счет не с единицы, а с шестерки, так что мизинцы получают номер шесть, безымянные пальцы — номер семь и так далее. Теперь, поскольку мы умножаем семь на восемь, приставляем седьмой палец на левой руке к восьмому пальцу на правой руке так, чтобы они выстроились в одну линию. Спрашивается: сколько пальцев на обеих руках находятся на этой линии или ниже нее? Ответ: два пальца на левой руке и три пальца на правой руке, всего пять. Пишем цифру 5 на бумаге. Выше этой линии на левой руке у нас 3 пальца, а на правой 2 пальца. Умножаем 3 на 2, получаем шесть, приписываем цифру 6 и получаем результат:

$$7 \cdot 8 = 56.$$



В принципе, подобным же образом можно перемножить между собой любые два числа из набора $6, 7, 8, 9$ и 10 (в соответствии с номерами пальцев на обеих руках), однако умножение на 10 никакой трудности не представляет, а для умножения на 9 больше подходит трюк № 1, который значительно проще. При вычислении же произведений $6 \cdot 6$ и $6 \cdot 7$ возникают кое-какие дополнительные усложнения, которые делают этот трюк существенно менее изящным. Давайте, например, умножим с его помощью 6 на 7. Соединяем шестой палец с седьмым. На линии соединения и ниже у нас находятся 3 пальца. Пока не записываем цифру 3, а держим в уме 3 десятка. Сверху от линии на левой руке у нас 4 пальца, а на правой 3 пальца. Умножаем 4 на 3, получаем 12, и это число прибавляем к трем десяткам, которые у нас в уме. В результате имеем:

$$6 \cdot 7 = 30 + 12 = 42.$$

Это не намного проще, чем вначале умножить 6 на 5, а потом еще прибавить два раза по 6. Но давайте разберемся, почему этот трюк работает. Пусть требуется вычислить произведение $a \cdot b$, где переменные a и b могут принимать значения $6, 7, 8, 9$ и 10. Мы приставляем палец номер a на левой руке к пальцу номер b на правой руке. На линии соединении и ниже на левой руке у нас находится $(a - 5)$ пальцев, на правой руке $(b - 5)$ пальцев. Значит, наш конечный результат будет содержать

$$(a - 5) + (b - 5) = (a + b - 10) \text{ десятков.}$$

Выше линии соединения на левой руке у нас $(10 - a)$ пальцев, а на правой руке $(10 - b)$ пальцев. Значит, конечный результат будет содержать

$$(10 - a) \cdot (10 - b) \text{ единиц.}$$

Давайте упростим это выражение. Для этого нам придется несколько раз воспользоваться свойством дистрибутивности. Сначала применим это свойство к скобке $(10 - a)$, умноженной на число, равное $(10 - b)$:

$$(10 - a) \cdot (10 - b) = 10 \cdot (10 - b) - a \cdot (10 - b).$$

После этого, с помощью всё той же дистрибутивности, избавляемся окончательно от всех скобок:

$$\begin{aligned}
&10 \cdot (10 - b) - a \cdot (10 - b) = \\
&10 \cdot 10 - 10 \cdot b - (a \cdot 10 - a \cdot b) = \\
&10 \cdot 10 - 10 \cdot b - a \cdot 10 + a \cdot b = \\
&10 \cdot 10 - 10b - 10a + ab.
\end{aligned}$$

Конечный результат, который мы получаем с помощью трюка, таков:

$$\begin{aligned}
&(a + b - 10) \text{ десятков } + \ (10 \cdot 10 - 10b - 10a + ab) \text{ единиц} = \\
&(a + b - 10) \cdot 10 + (10 \cdot 10 - 10b - 10a + ab) = \\
&10a + 10b - 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 - 10b - 10a + ab = \\
&ab.
\end{aligned}$$

Как видно, трюк нас не обманывает, а дает именно тот результат, который нам нужен.

Конспект

Если поступать по-умному, то таблицу умножения специально учить не надо, поскольку она сама собой выучится от частого применения. Но раз уж в школе детей к этому принуждают, то имеет смысл делать следующее: (1) заполнять по многу раз пустой бланк таблицы умножения, считая при необходимости на счетах; (2) решать много примеров из таблицы умножения, взятых случайным образом, — опять-таки прибегая, если нужно, к счетам. Можно также воспользоваться мнемоническими приемами: стишками и трюками с пальцами.

3.4. Округление чисел. Приближенные вычисления

Научившись умножать многозначные числа «в столбик», мы убедились, что это весьма муторное занятие. К счастью, мы будем этим заниматься недолго. В скором времени все сколь-нибудь сложные вычисления мы будем делать с помощью калькулятора. Сейчас мы практикуемся в счете исключительно в учебных целях, чтобы лучше понять и почувствовать «поведение» чисел. Впрочем, понимание и чутье можно с неменьшим успехом оттачивать на приближенных вычислениях, которые являются значительно более простыми. К ним-то мы теперь и приступим.

Допустим, мы хотим купить пять шоколадок по 19 рублей. Мы смотрим в свой кошелек и хотим быстро сообразить, хватит ли нам на это денег. Мы рассуждаем так: 19 это примерно 20, а 20 умножить на 5 это 100. Вот тут у нас в кошельке как раз есть сто рублей с небольшим. Значит, денег достаточно. Математик бы сказал, что мы округлили девятнадцать до двадцати и проделали приближенные вычисления. Но начнем всё по порядку.

Прежде всего оговоримся, что на первых порах мы будем заниматься округлением только положительных чисел. Делать это можно по-разному. Например, так:

$$\begin{aligned} 23 &\approx 20, \\ 456 &\approx 400, \\ 7891 &\approx 7000. \end{aligned}$$

Значок «$\approx$» читается как «приближенно равно». Здесь мы, как говорится, округлили числа вниз и, соотвественно, получили оценку снизу. Делается это очень просто: мы оставляем первую цифру числа такой, как она есть, а все последующие заменяем на нули. Ясно, что результат такого округления всегда оказывается меньше или равен исходному числу.

С другой стороны, числа можно также округлять и вверх, получая, таким образом, оценку сверху:

$$\begin{aligned} 23 &\approx 30, \\ 456 &\approx 500, \\ 7891 &\approx 8000. \end{aligned}$$

При таком округлении все цифры, начиная со второй, обращаются в нули, а первая цифра увеличивается на единицу. Особый случай возникает, когда первая цифра равна девятке, которая заменяется сразу на две цифры, 1 и 0:

$$96 \approx 100.$$

Результат округления вверх всегда больше или равен исходному числу.

Таким образом, у нас есть выбор, в какую сторону округлять: вверх или вниз. Обычно округляют в ту сторону, в которую ближе. Очевидно, что в большинстве случаев 11 лучше округлить до 10, а 19 — до 20. Формальные правила таковы: если вторая цифра у нашего числа находится в пределах от нуля до 4, то округляем вниз. Если же эта цифра оказывается в пределах от 5 до 9, то вверх. Таким образом:

$$\begin{aligned} 23 &\approx 20, \\ 456 &\approx 500, \\ 7891 &\approx 8000, \\ 98765 &\approx 100\,000. \end{aligned}$$

Отдельно надо отметить ситуацию, когда у числа вторая цифра — пять, а все последующие равны нулю, например 1500. Это число находится на одинаковом расстоянии как от 2000, так и от 1000:

$$\begin{aligned} 2000 - 1500 = 500, \\ 1500 - 1000 = 500. \end{aligned}$$

Поэтому, казалось бы, всё равно, в какую сторону округлять. Однако в таких случаях принято округлять не куда-нибудь, а только вверх — для того, чтобы правила округления можно было сформулировать как можно проще. Если мы видим на втором месте пятерку, то этого уже достаточно для принятия решения о том, куда округлять: последующими цифрами можно уже совершенно не интересоваться.

Пользуясь округлением чисел, мы теперь можем быстро, хотя и приближенно, решать примеры на умножение какой угодно сложности. Пусть требуется вычислить

$$6879 \cdot 267.$$

Округляем оба сомножителя и за пару секунд получаем:

$$6879 \cdot 267 \approx 7000 \cdot 300 = 2\,100\,000 \approx 2\,000\,000 = 2 \text{ миллиона}.$$

Для сравнения приведу точный ответ, который мы вычисляли, когда учились умножать в столбик:

$$6879 \cdot 267 = 1\,836\,693.$$

Что надо теперь сделать, чтобы понять, близко или далеко приближенный ответ отстоит от точного? — Конечно же, округлить точный ответ:

$$6879 \cdot 267 = 1\,836\,693 \approx 2\,000\,000 = 2 \text{ миллиона}.$$

У нас получилось, что после округления точный ответ стал равен приближенному. Значит, наш приближенный ответ не так уж и плох. Впрочем, надо заметить, что такая точность достигается далеко не всегда. Пусть надо вычислить $1497 \cdot 143$. Приближенные вычисления выглядят так:

$$1497 \cdot 143 \approx 1000 \cdot 100 = 100\,000 = 100 \text{ тысяч}.$$

А вот точный ответ (с последующим его округлением):

$$1497 \cdot 143 = 214\,071 \approx 200\,000 = 200 \text{ тысяч}.$$

Таким образом, точный ответ после округления оказался в 2 раза больше, чем приближенный. Это, конечно, не очень хорошо. Но признаюсь честно: я специально взял один из самых худших случаев. Обычно точность приближенных расчетов бывает всё же лучше.

Впрочем, мы до сих пор округляли числа и делали приближенные рассчеты лишь в самой, так сказать, грубой форме. Из всех разрядов числа мы оставляли незануленным только один — самый старший. Говорят, что мы округляли числа с точностью до одной значащей цифры. Однако мы можем округлять и поаккуратней, например, до двух значащих цифр:

$$
\begin{aligned}
1497 &\approx 1500,\\
143 &\approx 140.
\end{aligned}
$$

Правило тут почти такое же, как и раньше. Все разряды, кроме двух самых старших, зануляем. Если в первом из зануленных разрядов стояла цифра в пределах от нуля до 4, то ничего больше не делаем. Если же эта цифра была в пределах от 5 до 9, то в последний из незануленных разрядов добавляем единицу. Заметим, что если в разряде, в который добавляется единица, стоит девятка, то этот разряд переполняется и скидывается в ноль, а единицу «наследует» более старший разряд. То есть получается вот что:

$$195 \approx 190 + 10 = 200,$$

или даже:

$$995 \approx 990 + 10 = 1000.$$

Подобным же образом определяется и округление до трех значащих цифр и так далее.

Возвращаемся к нашему примеру. Посмотрим, что будет, если округлять числа не до одной, а до двух значащих цифр:

$$1497 \cdot 143 \approx 1500 \cdot 140 = 210\,000 = 210 \text{ тысяч}.$$

И еще раз сравним с точным ответом:

$$1497 \cdot 143 = 214\,071 \approx 210\,000 \approx 210 \text{ тысяч}.$$

Не правда ли, наше приближенное вычисление стало заметно точнее?

А теперь рассмотрим еще раз предыдущий пример на умножение, для которого мы теперь напишем два варианта приближенных ответов, и сравним их с ответом точным:

$$
\begin{aligned}
6879 \cdot 267 &\approx 7000 \cdot 300 = 2\,100\,000 \approx 2\,000\,000,\\
6879 \cdot 267 &\approx 6900 \cdot 270 = 1\,863\,000 \approx 1\,900\,000,\\
6879 \cdot 267 &= 1\,836\,693 \approx 1\,800\,000 \approx 2\,000\,000.
\end{aligned}
$$

Тут самое время упомянуть о таком правиле: Если сомножители округлены до одной значащей цифры, то и приближенный ответ следует сразу же округлить до одной значащей цифры. Если сомножители округлены до двух значащих цифр, то и ответ надо округлять до двух значащих цифр. Вообще, сколько значащих цифр у сомножителей, столько же значащих цифр должно остаться у произведения. Поэтому в первой строчке, едва получив $2\,100\,000$, мы тут же округлили это число до $2\,000\,000$. Так же и во второй строчке: мы не стали останавливаться на промежуточном результате $1\,863\,000$, а сразу же округлили его до $1\,900\,000$. Почему так? Потому что в числе $2\,100\,000$ все разряды, кроме самого первого, всё равно вычислены неверно. Подобным же образом, в числе $1\,863\,000$ неверно вычислены все разряды, кроме первых двух. Давайте взглянем на соответствующие расчеты, сделанные «в столбик»:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 6 & 8 & 7 & 9\\
 & & \times & & 2 & 6 & 7\\
\hline
 & & 4 & 8 & 1 & 5 & 3\\
 & 4 & 1 & 2 & 7 & 4 & \\
1 & 3 & 7 & 5 & 8 & & \\
\hline
1 & 8 & 3 & 6 & 6 & 9 & 3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 6 & 9 & \circ & \circ\\
 & & \times & & 2 & 7 & \circ\\
\hline
 & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ\\
 & 4 & 8 & 3 & \circ & \circ & \\
1 & 3 & 8 & \circ & \circ & & \\
\hline
1 & 8 & 6 & 3 & \circ & \circ & \circ
\end{array}
$$

Здесь слева воспроизведены точные вычисления, а справа — приближенные, выполненные после округления сомножителей до двух значащих цифр. Вместо нулей мы написали кружочки, чтобы подчеркнуть, что на самом деле за этими кружочками-нулями стоят какие-то другие цифры, которые после округления стали нам неизвестны. Не зная всех цифр в первых двух строчках, мы также не можем вычислить всех цифр и в последующих строчках — поэтому там тоже встречаются кружочки. Теперь всмотримся внимательнее: в двух самых старших разрядах нам кружочки нигде не попадаются. Значит, в ответной строке эти разряды вычислены более или менее точно. Но уже в третьем по старшинству разряде есть один кружочек, под которым подразумевается неизвестная нам цифра. Поэтому третий разряд в ответной строке мы, на самом деле, вычислить не можем. Тем более это относится к четвертому и последующим разрядам. Вот эти-то все разряды с неизвестными значениями и должны быть занулены в ходе последующего округления.

А что, интересно, будет, если один из сомножителей округлен с точностью до трех значащих цифр, а другой — только до одной? Давайте посмотрим, как будет выглядеть расчет в этом случае:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 6 & 8 & 8 & \circ \\
 & \times & & & 3 & \circ & \circ \\
\cline{3-7}
 & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \\
2 & 0 & 6 & 4 & \circ & & \\
\hline
2 & 0 & 6 & 4 & \circ & \circ & \circ
\end{array}
$$

Мы видим, что сколь-нибудь надежно определен только самый старший разряд, поэтому округлять ответ надо до одной значащей цифры:

$$6879 \cdot 267 \approx 6880 \cdot 300 = 2064000 \approx 2\,000\,000.$$

Мы видим также, что значащая цифра (в данном случае 2) может отличаться от истинной (в данном случае 1), но, как правило, не больше чем на единицу.

В общем случае, мы должны ориентироваться на сомножитель с наименьшим числом значащих цифр: точно до такого же числа значащих цифр следует округлять ответ.

До сих пор мы говорили только о приближенном умножении. А как насчет сложения? — Разумеется, сложение тоже может быть приближенным. Только округлять слагаемые, подготавливая их к приближенному сложению, надо не совсем так, как мы округляли сомножители, подготавливая их к приближенному умножению. Рассмотрим пример:

$$61\,238 + 349 = 61\,587.$$

Округлим, для начала, каждое из слагаемых до одной значащей цифры:

$$61\,238 + 349 \approx 60\,000 + 300 = 60\,300 \approx 60\,000.$$

Или, если записать в столбик:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 6 & \circ & \circ & \circ & \circ \\
+ & & & 3 & \circ & \circ \\
\hline
 & 6 & \circ & 3 & \circ & \circ
\end{array}
$$

Интересно отметить, что здесь вместо тройки мы могли бы поставить совершенно любую цифру, и это никак бы не отразилось на конечном ответе. С тем же успехом мы могли бы написать:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{ccccc} 6 & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & & \circ & \circ & \circ \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccccc} 6 & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array} \end{array}$$

Или:

$$61\,238 + 349 \approx 60\,000 + 0 = 60\,000.$$

Мы можем тут вместо второго слагаемого написать 0, или, как еще говорится, полностью пренебречь им по сравнению с первым слагаемым. Попробуем увеличить точность наших расчетов. Округляем теперь до двух значащих цифр:

$$61\,238 + 349 \approx 61\,000 + 350 = 61\,350 \approx 61\,000.$$

И снова мы могли бы сразу пренебречь вторым слагаемым и написать:

$$61\,238 + 349 \approx 61\,000 + 0 = 61\,000.$$

Лишь когда мы увеличиваем точность округления до трех значащих цифр, второе слагаемое начинает играть какую-то роль:

$$61\,238 + 349 \approx 61\,200 + 349 = 61\,549 \approx 61\,500.$$

Или:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{ccccc} 6 & 1 & 2 & \circ & \circ \\ & & 3 & 4 & 9 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccccc} 6 & 1 & 5 & 4 & 9 \end{array} \end{array}$$

Однако мы снова перестарались с точностью второго слагаемого: для него вполне было бы досточно и одной значащей цифры:

$$61\,238 + 349 \approx 61\,200 + 300 = 61\,500.$$

Тут действует такое правило: слагаемые, в отличие от сомножителей, следует округлять не до одинакового числа значащих цифр, а до одного и того же разряда. Округлить до разряда десятков — значит, округлить так, чтобы последняя значащая цифра результата округления находилась в разряде десятков. При округлении до разряда сотен последняя значащая цифра находится в разряде сотен и так далее. Приближенный ответ сразу же оказывается округлен с нужной точностью и дальнейшего округления не требует. Выпишем еще раз наш пример, посчитав его с различной точностью:

$$\begin{array}{ll}
61238 + 349 = 61587 & \text{(точный расчет),} \\
61238 + 349 \approx 61240 + 350 = 61590 & \text{(округление до десятков),} \\
61238 + 349 \approx 61200 + 300 = 61500 & \text{(до сотен),} \\
61238 + 349 \approx 61000 + 0 = 61000 & \text{(до тысяч),} \\
61238 + 349 \approx 60000 + 0 = 60000 & \text{(до десятков тысяч),} \\
61238 + 349 \approx 100000 + 0 = 100000 & \text{(до сотен тысяч).}
\end{array}$$

Следует отметить, что при округлении второго слагаемого (349) до тысяч (и, тем более, до более старших разрядов) получается ноль. Здесь в последней строке мы встречаемся также с еще одним примечательным случаем:

$$61\,238 \approx 100\,000,$$

когда число округляется до более высокого разряда, чем те, которые содержатся в нем самом, — и всё же результат такого округления оказывается отличным от нуля.

Рассмотрим теперь приближенное вычитание. Мы знаем, что вычитание можно рассматривать просто как одну из разновидностей сложения. Поэтому правила приближенного вычитания вообще-то совпадают с правилами приближенного сложения. Однако тут возможна особая ситуация, которая возникает, когда мы вычисляем разность близких друг к другу чисел. Допустим, требуется грубо оценить, чему равно значение выражения:

$$7654 - 7643.$$

После грубого округления членов разности мы получаем:

$$7654 - 7643 \approx 8000 - 8000 = 0.$$

Прямо скажем, получилось не очень-то хорошо. Точное значение, как нетрудно вычислить, таково:

$$7654 - 7643 = 11.$$

Всё-таки есть немалая разница между нулем и одиннадцатью! Поэтому даже при самых грубых оценках члены разности принято округлять до такого разряда, чтобы результат был всё же отличен от нуля:

$$7654 - 7643 \approx 7650 - 7640 = 10.$$

А вот еще одна неприятность, которая может случиться при приближенном вычитании:

$$2500 - 2499 \approx 3000 - 2000 = 1000.$$

Мы получили в ответе аж тысячу, в то время как точное значение разности равно всего лишь единице! Тут уж надо смотреть внимательно и не допускать, что называется, формалистского подхода.

Впрочем, возможны такие ситуации, когда значение разности требуется вычислить с точностью до какого-то заранее предопределенного разряда, например, до разряда тысяч. В этом случае вполне допустимо именно так и писать:

$$7654 - 7643 \approx 8000 - 8000 = 0.$$
$$2500 - 2499 \approx 3000 - 2000 = 1000.$$

Формально мы совершенно правы. Мы ошибаемся в разряде тысяч не более, чем на одну единицу, а это — совершенно обычное дело, когда мы работаем с такой точностью, при которой последняя значащая цифра приходится как раз на разряд тысяч. Подобным же образом, с точностью до сотен:

$$7654 - 7643 \approx 7700 - 7600 = 100.$$
$$2500 - 2499 \approx 2500 - 2500 = 0.$$

Хотя приближенные вычисления — вещь довольно простая, подходить к ней совсем уж бездумно нельзя. Всякий раз точность приближения надо выбирать исходя из поставленной задачи и здравого смысла.

Нам осталось рассмотреть приближенное деление. Но мы до сих пор не проходили деление по-настоящему. Мы умеем делить нацело и делить с остатком, но поделить «по-взрослому», без остатка, одно произвольное число на другое мы еще не можем. Поэтому мы пока выработаем, так сказать, временные правила приближенного деления, отвечающие нашему сегодняшнему пониманию предмета. Делить мы пока будем только грубо, с точностью до одной значащей цифры.

Пусть требуется приближенно вычислить:

$$76\,464 \,/\, 324.$$

Прежде всего округлим делитель (324) до одной значащей цифры:

$$76\,464\,/\,324 \approx 76\,464\,/\,300.$$

Теперь для нас важно, что первая цифра делимого (7) оказалась *больше или равна* сохраненной цифры делителя (3): $7 \geqslant 3$. В этом случае мы округляем делимое до *одной* значащей цифры, а потом заменяем эту цифру на ближайшее число, которое делится нацело на сохраненную цифру делителя:

$$76\,464\,/\,324 \approx 76\,464\,/\,300 \approx 80\,000\,/\,300 \approx 90\,000\,/\,300.$$

Здесь, по стандартным правилам округления, $76\,464 \approx 80\,000$, однако, поскольку 8 не делится нацело на 3, мы «пошли еще дальше вверх», так что у нас оказалось $76\,464 \approx 90\,000$. Далее, у делимого и у делителя убираем одновременно «с хвоста» одинаковое число «лишних нулей»:

$$76\,464\,/\,324 \approx 76\,464\,/\,300 \approx 80\,000\,/\,300 \approx 90\,000\,/\,300 = 900\,/\,3.$$

После этого выполнить деление не составляет никакого труда:

$$76\,464\,/\,324 \approx 76\,464\,/\,300 \approx 80\,000\,/\,300 \approx 90\,000\,/\,300 = 900\,/\,3 = 300.$$

Приближенный ответ готов. Приведу для сравнения точный ответ:

$$76\,464\,/\,324 = 236 \approx 200.$$

Как видно, расхождение в единственной значащей цифре приближенного ответа составляет одну единицу, что вполне приемлемо.

Пусть теперь надо закончить такие приближенные вычисления:

$$35\,144\,/\,764 \approx 35\,144\,/\,800.$$

На этот раз первая цифра делимого оказалось *меньше* первой цифры округленного делителя ($3 < 8$). В этом случае мы округляем делимое до *двух* значащих цифр, а потом заменяем эти цифры на ближайшее число, которое можно поделить нацело на первую цифру делителя:

$$35\,144\,/\,764 \approx 35\,144\,/\,800 \approx 35\,000\,/\,800 \approx 32000\,/\,800.$$

(Если «подтянуть» можно с равным успехом в обе стороны, то «подтягиваем», для определенности, вверх.) Теперь убираем «лишние» нули и выполняем деление:

$$35\,144\,/\,764 \approx 35\,144\,/\,800 \approx 35\,000\,/\,800 \approx 32\,000\,/\,800 = 320\,/\,8 = 40.$$

Точный расчет таков:

$$35\,144\,/\,764 = 46 \approx 50.$$

И опять точность приближенного результата вполне приемлема.

Следует отметить, что делить приближенно можно даже такие числа, которые нацело друг на друга не делятся. Важно лишь (пока), чтобы делимое было больше или равно делителю.

В заключение этого урока нам осталось разобраться с тем, как округлять отрицательные числа и как делать с ними приближенные вычисления. На самом деле, для любого отрицательного числа мы всегда можем написать что-то в этом роде:

$$-3456 = -(+3456).$$

Здесь у нас в скобке стоит положительное число. Его-то мы и округлим по тем правилам, которые мы выработали для положительных чисел. Например, если его требуется округлить до двух значащих цифр, то мы получим:

$$-3456 = -(+3456) \approx -(+3500) = -3500.$$

Так же просто все вычисления с отрицательными числами можно подменить на вычисления с участием только положительных чисел. Например,

$$
\begin{aligned}
&-234-567=-(234+567)\approx-(200+600)=-800,\\
&234-567=-(567-234)\approx-(600-200)=-400,\\
&234\cdot(-567)=-(234\cdot567)\approx-(200\cdot600)=-120\,000\approx-100\,000.
\end{aligned}
$$

Конспект

1. *Округление положительных чисел с точностью до n значащих цифр*. Первые n старших разрядов оставляем такими, как есть, а на месте всех остальных разрядов пишем нули — зануляем. Если самый старший из зануленных разрядов был больше или равен 5, то к самому младшему сохраненному разряду добавляем единицу. Например:

$$
\begin{aligned}
&153\approx200\ \text{(одна значащая цифра)},\\
&153\approx150\ \text{(две значащие цифры)}.
\end{aligned}
$$

2. *Приближенное умножение*. Сомножители округляем до одинакового числа значащих цифр. С такой же точностью округляем и результат. Например (с точностью до одной значащей цифры):

$$34\cdot45\approx30\cdot50=1500\approx2000.$$

Если сомножители округлить с разной точностью, то результат «унаследует» наименьшую из них.

3. *Приближенное сложение и вычитание*. Слагаемые (или члены разности) округляем до одинакового разряда. До этого же разряда окажется автоматически округлен и результат. Например (округление до разряда сотен):

$$61\,238+349\approx61\,200+300=61\,500.$$

В случае вычитания, однако, следует тщательно относиться к выбору точности, если мы не хотим получить что-то вроде

$$2500-2499\approx3000-2000=1000.$$

Здесь приближенный результат равен тысяче, в то время как точный результат равен единице.

4. *Приближенное деление*. Округляем делитель до одной значащей цифры. Пусть она равна n. Если первая цифра делимого больше или равна n, то округляем делимое до одной значащей цифры. В противном случае округляем его до двух значащих цифр. После этого значащие цифры делимого заменяем на ближайшее число, которое делится на n. Измененное делимое делим нацело на измененный делитель и получаем результат. Например:

$$35\ 144/764\approx35\ 144/800\approx32\ 000/800=40.$$

5. Правила округления и приближенных вычислений с положительными числами легко переносятся на отрицательные числа, поскольку

$$
\begin{aligned}
&-3456=-(+3456),\\
&-234-567=-(234+567),\\
&234\cdot(-567)=-(234\cdot567)\ \text{и т. п.}
\end{aligned}
$$

3.5. Деление «уголком»

Деление «уголком» — это, на мой взгляд, самая тяжелая, самая нудная тема во всей школьной математике. Тут нам придется всерьез поднапрячься. Пусть, однако, нас вдохновляет мысль, что весь последующий материал будет значительно легче и приятнее.

Прежде всего, рассмотрим деление на однозначное число. Допустим, мы хотим вычислить значение выражения

$$648\,/\,2.$$

Пользуясь свойствами умножения, мы можем расписать делимое таким образом:

$$\begin{aligned}&648 =\\&6 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8 =\\&3 \cdot 2 \cdot 100 + 2 \cdot 2 \cdot 10 + 4 \cdot 2 =\\&(3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4) \cdot 2 =\\&324 \cdot 2.\end{aligned}$$

После этого становится очевидно, что частное от деления равно

$$648\,/\,2 = 324.$$

Но это мы взяли самый что ни на есть простейший случай, когда каждую отдельно взятую цифру делимого можно поделить на делитель. А вот пример несколько посложнее:

$$156\,/\,2 = ?$$

Здесь первая цифра оказалась меньше делителя. Поэтому, расписывая делимое, мы не будем отрывать ее от второй цифры:

$$\begin{aligned}&156 =\\&15 \cdot 10 + 6.\end{aligned}$$

Поскольку число 15 не делится нацело на 2, придется нам прибегнуть к делению с остатком. Представим результат такого деления в виде:

$$15 = 7 \cdot 2 + 1 = 14 + 1.$$

Теперь мы можем продолжать расписывать наше делимое дальше:

$$\begin{aligned}&156 =\\&15 \cdot 10 + 6 =\\&(14 + 1) \cdot 10 + 6 =\\&14 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 6 =\\&14 \cdot 10 + 16 =\\&7 \cdot 2 \cdot 10 + 8 \cdot 2 =\\&(7 \cdot 10 + 8) \cdot 2 =\\&78 \cdot 2.\end{aligned}$$

Отсюда моментально получаем ответ:

$$156\,/\,2 = 78.$$

Такого рода расчеты можно проводить в уме и сразу же писать ответ. Но мы сейчас перепишем их в виде краткой таблицы. Умение составлять такие таблицы нам пригодится, когда мы займемся делением на многозначные числа, когда всё окажется не так просто. Делимое и делитель запишем так:

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 5 & 6 & 2 \\ \cline{4-4}
 & & & \\
\end{array}$$

При делении первых двух разрядов (15) на двойку получается 7 плюс еще какой-то остаток. С этим остатком мы разберемся чуть позже, а пока запишем семерку под чертой снизу от делителя (здесь у нас со временем будет выписан полный ответ):

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 5 & 6 & 2 \\ \cline{4-4}
 & & & 7 \\
\end{array}$$

Умножаем на эту семерку наш делитель (2) и записываем ответ (14) под первыми двумя разрядами делимого (15):

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 5 & 6 & 2 \\ \cline{4-4}
1 & 4 & & 7 \\
\end{array}$$

Теперь настало время вычислить остаток от деления 15 на 2. Он равен, очевидно,

$$15 - 2 \cdot 7 = 15 - 14.$$

У нас уже всё подготовлено, чтобы выполнить это вычитание «столбиком»:

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 5 & 6 & 2 \\ \cline{4-4}
1 & 4 & & 7 \\ \cline{1-2}
 & 1 & \multicolumn{1}{c}{} & \\
\end{array}$$

У нас получается единица, к которой мы приписываем шестерку из следующего разряда делимого:

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 5 & 6 & 2 \\ \cline{4-4}
1 & 4 & & 7 \\ \cline{1-2}
 & 1 & \multicolumn{1}{c}{6} & \\
\end{array}$$

В результате такого приписывания у нас получается число 16. Мы делим его на наш делитеть (2) и получаем 8. Эту восьмерку пишем в строке ответа, под чертой снизу от делителя:

$$\begin{array}{ccc|cc}
1 & 5 & 6 & 2 & \\ \cline{4-5}
1 & 4 & & 7 & 8 \\ \cline{1-2}
 & 1 & \multicolumn{1}{c}{6} & & \\
\end{array}$$

Ответ мы получили, однако правила составления таблицы таковы, что нам надо добавить в нее еще две строки. Мы должны формальным образом убедиться, что не потеряли остаток от деления. Умножаем делитель (2) на последнюю цифру ответа (8), приписываем результат (16) снизу к нашей таблице в последние два разряда делимого:

1	5	6	2	
1	4		7	8
	1	6		
	1	6		

Вычитаем последнюю строку из предпоследней и получаем 0:

1	5	6	2	
1	4		7	8
	1	6		
	1	6		
		0		

Этот последний ноль есть не что иное, как остаток от деления, который образовался бы в том случае, если бы мы рассматривали деление с остатком:

$156 : 2 = 78$ (ост. 0).

Чтобы получше это понять, возьмем похожий пример, в котором, однако, остаток не равен нулю:

$157 : 2 = 78$ (ост. 1).

Таблица для этого примера выглядит так:

1	5	7	2	
1	4		7	8
	1	7		
	1	6		
		1		

Здесь, опять-таки, остаток стоит в последней строке. Для полноты картины распишем наше делимое в таком виде:

$157 =$

$14 \cdot 10 + 17 =$

$7 \cdot 2 \cdot 10 + 8 \cdot 2 + 1 =$

$(7 \cdot 10 + 8) \cdot 2 + 1 =$

$78 \cdot 2 + 1.$

Теперь мы готовы к тому, чтобы делить (нацело или с остатком) на многозначные числа. Это делается при помощи подобной же таблицы (именно из-за ее особого вида данная процедура получила название деление «уголком»). Допустим, требуется выполнить деление с остатком:

$135674 : 259 = ?$

Приступаем к заполнению таблицы:

1	3	5	6	7	4	2	5	9

В данном случае, чтобы найти первую цифру частного, надо взять первые четыре цифры делимого (1356) и получившееся число поделить (с остатком) на делитель (259). Почему надо взять именно первые четыре цифры делимого? Потому что если бы мы взяли хотя бы на одну цифру меньше, то получившееся число (135) оказалось бы меньше делителя (259), а это не то, что нам надо. Итак, возьмем первые четыре цифры делимого и рассмотрим следующее деление с остатком:

$$1356 : 259 = ?$$

Тут нам помогут приближенные вычисления, для которых, как мы знаем, вовсе необязательно, чтобы числа делились друг на друга нацело:

$$1356 / 259 \approx 1356 / 300 \approx 1500 / 300 = 15 / 3 = 5.$$

Зная результат приближенного деления, мы можем предположить, что, скорее всего,

$$1356 : 259 = 5 \text{ (остаток — пока неважно какой).}$$

Конечно, абсолютной уверенности у нас нет. Здесь вместо пятерки вполне может стоять четверка или шестерка, однако вряд ли мы ошиблись больше, чем на одну единицу. Имея это в виду, тем не менее берем эту пятерку и заносим ее в нашу таблицу в строку ответа. После этого умножаем на нее делитель (259) и при этом записываем ответ под делимым в подходящие разряды:

$$
\begin{array}{rcccccc|ccc}
 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 9 \\ \cline{8-10}
 & {}^{1} & {}^{2} & {}^{4} & & & & & & \\
259 \cdot 5 = & 1 & 2 & 9 & 5 & & & 5 & & \\ \cline{2-5}
\end{array}
$$

Здесь «маленькие» цифры — это побочный продукт процедуры умножения: мы познакомились с ними, когда учились умножать «в столбик». После того как умножение выполнено, они становятся больше не нужны: на них можно просто не обращать внимания. Выражение $259 \cdot 5$, написанное слева от таблицы, помещено сюда только ради пояснения того, что мы делаем. К таблице оно, собственно, не принадлежит, и в будущем мы такие пояснения выписывать не будем. Тут важно отметить, что результат нашего умножения 1295 оказался меньше записанного над ним числа 1356 , составленного из первых четырех цифр делимого. Если бы это было не так, то это означало бы, что приближенное деление дало нам завышенный результат. Нам надо было бы тогда зачеркнуть пятерку в строке ответа, на ее место поставить четверку — после чего зачеркнуть и переделать все наши последующие вычисления. Но нам на этот раз повезло, и ничего переделывать не требуется.

Теперь выполняем вычитание в столбик и получаем:

$$
\begin{array}{rcccccc|ccc}
 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 9 \\ \cline{8-10}
 & {}^{1} & {}^{2} & {}^{4} & & & & & & \\
259 \cdot 5 = & 1 & 2 & 9 & 5 & & & 5 & & \\ \cline{2-5}
 & & & 6 & 1 & & & & & \\
\end{array}
$$

Внимательно приглядимся к полученной разности (61). Очень важно, что она оказалась меньше делителя (259). В противном случае мы пришли бы к выводу, что приближенное деление дало нам заниженный результат и нам пришлось бы теперь исправлять в строке ответа пятерку на шестерку , а также переделывать все последующие вычисления. К счастью, этого не случилось. Приближенное вычисление нас не подвело, и мы теперь совершенно точно знаем, что,

$$1356 : 259 = 5 \text{ (ост. } 61 \text{).}$$

Возвращаемся к таблице. К нашему остатку (61) приписываем семерку из следующего разряда делимого и приступаем к нахождению второй цифры ответа. Это делается с помощью точно такой же процедуры, что и раньше. Потом — очередь за третьей цифрой. В конце концов таблица принимает такой вид:

$$
\begin{array}{r|cccccc|ccc}
 & 1&3&5&6&7&4 & 2&5&9 \\ \cline{8-10}
 & {\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 4}& & & & & & \\
259\cdot 5 = & 1&2&9&5& & & 5&2&3 \\ \cline{2-5}
 & & &6&1&7& & & & \\
 & & &{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 1}& & & & & \\
259\cdot 2 = & & &5&1&8& & & & \\ \cline{4-6}
 & & & &9&9&4 & & & \\
 & & & &{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 2}& & & & \\
259\cdot 3 = & & & &7&7&7 & & & \\ \cline{5-7}
 & & & &2&1&7 & & &
\end{array}
$$

Можно выписывать окончательный ответ:

$$135674 : 259 = 523 \text{ (ост. } 217).$$

Самая большая неприятность в делении «уголком» состоит в том, что приближенные вычисления, к которым приходится прибегать по ходу дела, не дают сразу гарантированно правильного результата и нуждаются иногда в последующей коррекции. Впрочем, по мере тренировки, у нас выработается особое чутье и мы будем уже сразу почти наверняка знать, какие цифры следует писать в строке ответа, чтобы потом ничего больше не надо было исправлять и переделывать.

Разумеется, нам будут попадаться случаи, когда частное содержит нули. Каждый такой ноль позволит сделать в таблице небольшие сокращения. Вот пример такой таблицы:

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
2&6&2&7&4&0 & 8&7& & \\ \cline{7-10}
{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 2}& & & & & & & & \\
2&6&1& & & & 3&0&2&0 \\ \cline{1-3}
 & &1&7&4& & & & & \\
 & &{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 1}& & & & & & \\
 & &1&7&4& & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & &0& & & & &
\end{array}
$$

Как и в случае умножения «в столбик», для того чтобы было удобнее писать «маленькие» цифры, нам может понадобиться лист со специальной линовкой для вычислений:

http://nekin.info/math/kletka+.pdf.

Теперь остается только тренироваться, тренироваться и тренироваться.

Конспект

Деление «уголком». Рассмотрим пример:

делимое : делитель = частное (остаток такой-то).

Наша задача — найти частное и остаток, если известны делимое и делитель. Решаем эту задачу в несколько шагов, на каждом из которых мы находим одну цифру частного.

Шаг первый. Берем в делимом столько цифр спереди, чтобы они составляли число, которое при делении на делитель дает однозначное число и еще какой-то (промежуточный) остаток. Выполнив такое деление, выписываем полученное однозначное число в качестве первой цифры частного, а к промежуточному остатку приписываем в конец первую из оставшихся цифр делимого. В результате такого приписывания мы получаем число, которое мы передаем для дальнейшей «обработки» во второй шаг.

Шаг второй. Число, поступившее для «обработки» из предыдущего шага, делим на делитель. В результате получаем однозначное число и какой-то еще промежуточный остаток. Однозначное число мы записываем в качестве следующей цифры частного, а к промежуточному остатку приписываем в конец первую из оставшихся цифр делимого и передаем получившееся число для дальнейшей «обработки» в следующий шаг.

Описание *последующих шагов* в точности совпадает с описанием второго шага. Мы останавливаемся, когда в делимом больше не остается цифр для приписывания к очередному промежуточному остатку. К этому времени частное оказывается полностью выписанным, а последний промежуточный остаток и есть окончательный остаток в нашем исходном примере.

3.6. Обратные операции. Операция деления. Дроби

Давайте вспомним, что такое уравнения и как они решаются. Пусть требуется решить следующее уравнение относительно неизвестной переменной x:

$$x + 5 = 8.$$

Фактически нам дано, что если подействовать оператором

$$(...) + 5$$

на переменную x, то в результате получается 8. Чтобы найти значение x, мы берем еще один оператор, а именно

$$(...) - 5,$$

и действуем им на обе части данного нам уравнения:

$$x + 5 - 5 = 8 - 5.$$

После очевидных упрощений получаем:

$$x = 3.$$

Таким образом, два оператора, с которыми мы тут имеем дело,

$$(...) + 5 \text{ и } (...) - 5,$$

устроены таким образом, что действие одного оператора полностью отменяет действие другого. Это можно записать в таком виде:

$$((...) + 5) - 5 = ((...) - 5) + 5 = (...).$$

Про такую ситуацию говорят, что оператор $(...) - 5$ является *обратным* к оператору $(...)+5$. С тем же успехом можно сказать, что оператор $(...) + 5$ является обратным к оператору $(...) - 5$, или же, что эти два оператора являются *взаимно обратными*.

Давайте теперь решим такое уравнение:

$$5 + x = 8.$$

Для этого нам мог бы пригодиться оператор, обратный к

$$5 + (...).$$

Таким обратным оператором, очевидно, является

$$-5 + (...).$$

Итак, имеем:

$$-5 + 5 + x = -5 + 8.$$

Поскольку действия взаимно обратных операторов «гасят» друг друга, мы быстро приходим к ответу:

$$x = 3.$$

Любопытная ситуация возникает, если рассмотреть такое уравнение:

$$5 - x = 3.$$

Нам надо подобрать оператор, обратный к $5 - (...)$. Да ведь это же он сам и есть! Действительно,

$$5 - (5 - (...)) = 5 - 5 + (...) = (...)$$

Подействовав этим оператором на обе части уравнения, получаем:

$$5 - (5 - x) = 5 - 3,$$
$$x = 2.$$

Рассмотрим теперь уравнения с участием умножения. Например, такое:

$$3x = 15.$$

Каким оператором тут следует воспользоваться? До сих пор мы фактически пользовались оператором деления нацело:

$$(\ldots)/3.$$

Этот оператор, безусловно, позволит нам решить уравнение, но он, прямо скажем, не так хорош, как все предыдущие. Во-первых, он неприменим к числам, которые не делятся нацело на 3, а во-вторых, его можно поставить только после того выражения, на которое он действует. Операторы других арифметических действий, слегка изменив, можно поставить и с другой стороны, например:

$$(\ldots) + 3 = 3 + (\ldots),$$
$$(\ldots) - 3 = -3 + (\ldots),$$
$$(\ldots) \cdot 3 = 3 \cdot (\ldots).$$

А для оператора деления $(\ldots)/3$ такой возможности не существует. Он явно нуждается в «доработке». Давайте еще раз взглянем на уравнение

$$3x = 15.$$

Тут бы очень кстати пришелся новый, усовершенствованный оператор деления, который можно было бы поставить *перед* выражением $3x$ и который был бы обратным к оператору $3(\ldots)$, то есть отменял бы его действие. Такой оператор действительно есть. Называется он «одна третья часть от» или, короче, «одна треть» и обозначается так:

$$\frac{1}{3}(...)$$

Разумеется, обычно это записывается в упрощенном виде, без многоточия:

$$\frac{1}{3}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{3}(3x) = x.$$

Но, пользуясь тем, что сомножители можно произвольно менять местами, мы также вправе написать:

$$\frac{1}{3}(x \cdot 3) = x.$$

Или даже в еще более общем виде

$$\frac{1}{3}(a \cdot 3 \cdot b) = a \cdot b.$$

Иначе говоря, оператор $\frac{1}{3}$ выискивает тройку в стоящем после него произведении чисел и уничтожает ее. Но тогда спрашивается, а можно ли этот оператор применить к одному единственному числу? Например, к числу 15 (которое стоит в левой части уравнения $3x = 15$, с которого мы начали свои рассуждения)? Разумеется, можно:

$$\frac{1}{3}\,15 = \frac{1}{3}(3 \cdot 5) = 5.$$

Да, но у нас тут всё так легко получилось только потому, что 15 делится нацело на 3, а как же быть с числами, которые на 3 не делятся? Что, например, будет, если подействовать оператором $\frac{1}{3}$ на число 2? Тогда мы получим другой оператор, действие которого на произвольное число x мы определим следующим образом:

$$\left(\frac{1}{3}2\right)x = \frac{1}{3}(2x).$$

Это очень похоже на равенство, с помощью которого мы записывали ассоциативность умножения (называемое в школе сочетательным свойством):

$$(ab)c = a(bc).$$

Теперь мы вправе считать, что переменная a здесь может обозначать не только любое число, но и наш новый оператор деления, такой как $\frac{1}{3}$, или $\frac{1}{5}$, или $\frac{1}{10}$. Согласно нашему определению, оператор $\frac{1}{3}2$ действует на произведение чисел, содержащее тройку, следующим образом:

$$\left(\frac{1}{3}2\right)(3y) = \frac{1}{3}(2 \cdot 3y) = 2y.$$

Иначе говоря, оператор $\frac{1}{3}2$ находит в последующем произведении тройку и заменяет ее на двойку. А если следом идет число, которое не делится на три, — например 5 — тогда он превращается в новый оператор:

$$\left(\frac{1}{3}2\right)5 = \frac{1}{3}(2 \cdot 5) = \frac{1}{3}10.$$

Этот оператор, будучи сам по себе совершенно бессмысленным, просто «ждет своего часа», когда после него окажется число, делящееся нацело на 3. Мы, собственно, уже давно привыкли к такому положению дел, потому что с самого начала мы нечто подобное говорили про все числа вообще, которые обретают смысл только тогда, когда они «действуют» на какие-то предметы, например, на поросят или рубли.

Теперь давайте вспомним о нашем пожелании, чтобы новый оператор мог действовать на числа с разный сторон: как слева направо $\frac{1}{3}(...)$, так и справа налево $(\ldots)\frac{1}{3}$. Тут нам снова поможет равенство, выражающее свойство ассоциативности:

$$(ab)c = a(bc).$$

Договоримся считать, что здесь переменная b может обозначать не только число, но и новый оператор деления. Тогда запись $2\frac{1}{3}$ начинает оказывать на последующее произведение такое действие:

$$\left(2\frac{1}{3}\right)(3y) = 2\left(\frac{1}{3}(3y)\right) = 2y.$$

Мы видим, оператор $2\frac{1}{3}$ действует точно так же, как и оператор $\frac{1}{3}2$, то есть выполняется операторное равенство:

$$2\,\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,2.$$

Это то, что в случае целых чисел мы называли коммутативностью (переместительностью):

$$ab = ba,$$

только на этот раз переменная b может обозначать не только привычные числа, но и новые операторы.

Важный частный случай возникает, когда $a = 3$, $b = \frac{1}{3}$:

$$3\,\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,3 = \frac{1}{3}(3 \cdot 1) = 1.$$

Это равенство говорит нам о том, что операторы 3 и $\frac{1}{3}$ являются взаимно обратными.

Для полноты картины нам осталось договориться, что ассоциативность

$$a(bc) = (ab)c$$

распространяется также на тот случай, когда новый оператор стоит на месте последней из входящих сюда переменных, а именно c. Пусть, например, $a = 3x$, $b = 2$, $c = \frac{1}{3}$. Тогда

$$(3x)\left(2\frac{1}{3}\right) = (3x \cdot 2)\frac{1}{3} = (2x \cdot 3)\frac{1}{3} = 2x\left(3\frac{1}{3}\right) = 2x \cdot 1 = 2x.$$

Коммутативность и ассоциативность нового оператора деления означают, что его можно произвольно переставлять с операцией умножения. Пусть нам дано произведение любого числа каких угодно целых чисел. Если мы заходим подействовать на это произведение оператором $\frac{1}{3}$, то мы вольны ставить его куда угодно: хоть в самое начало, хоть в самый конец, хоть где-нибудь посередине между какими-то сомножителями. Результат в любом случае будет одинаковым. Оператор отыщет в данном произведении тройку и уничтожит ее. А если тройки среди сомножителей не окажется, то вся запись превратится в один большой оператор, «ждущий своего часа», когда либо справа, либо слева от него кто-нибудь когда-нибудь всё же припишет тройку, или даже втиснет ее где-нибудь посередине. Важное уточнение: если среди сомножителей находится две тройки или более, то оператор $\frac{1}{3}$ уничтожит только одну из них. А если троек в явном виде нет, но один из сомножителей можно представить в виде $3x$, то оператор превратит этот сомножитель просто в x.

Приведем теперь решение уравнения, которое навело нас на мысль о новом операторе:

$$3x = 15.$$

Применяем к обеим частям оператор $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3}\,3x = \frac{1}{3}\,15$$

и получаем

$$x = 5.$$

До сих пор мы подразумевали, что в выражении

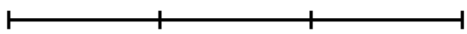
$$\frac{1}{3}(3x)$$

переменная x обозначает какое-то число. Но на самом деле за этой переменной может стоять любая вещь. Например,

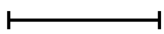
$$\frac{1}{3}(3\text{ поросенка}) = 1\text{ поросенок}.$$

Оператор $\frac{1}{3}$ можно применять к любому объекту, который состоит из трех одинаковых частей или который можно разделить на три одинаковые части. Возьмем, например, отрезок

и разобьем его на три отрезка одинаковой длины:



Подействав оператором $\frac{1}{3}$, получаем:



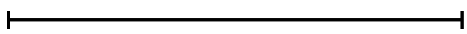
Отрезки исключительно хороши для наглядного представления новых операторов деления, потому что всякий отрезок легко разбить на любое число одинаковых частей. Но можно ли взять «одну треть от» коровы или автомобиля? В некотором смысле, да, можно. Допустим, нам дано, что с какого-то конвейера сходит один автомобиль за каждые три часа. Спрашивается: сколько автомобилей сходит с этого конвейера за один час? Ответ: «одна треть» автомобиля. Конечно, сама по себе «одна треть» автомобиля — это абсурд, бессмыслица. Но мы уже привыкли иметь дело с бессмыслицей, если она является временным, промежуточным результатом. Рано или поздно мы подействуем на «одну треть» автомобиля оператором $3(\ldots)$ — и смысл снова восстановится. Например, нас могут спросить: а сколько автомобилей сходит с этого конвейера за сутки (24 часа)? Тогда мы напишем так:

$$24\,\frac{1}{3}\text{ автомобиля} = 8\cdot 3\,\frac{1}{3}\text{ автомобиля} = 8\text{ автомобилей}.$$

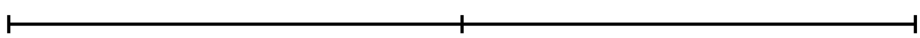
Но вернемся к отрезкам и постараемся с их помощью наглядно представить себе равенство

$$\frac{1}{3}\,2 = 2\,\frac{1}{3}.$$

Возьмем какой-нибудь отрезок и условимся считать, что длина его равна единице:



Подействуем на длину этого отрезка оператором $2(\ldots)$, иначе говоря, сделаем его в два раза длиннее:



Полученный отрезок поделим на три равные части:

И возьмем одну такую часть:

Точно такой же отрезок можно получить другим способом. Снова берем отрезок, длина которого условно равна единице:

Делим его на три равные части:

И берем две из таких частей:

Как нетрудно убедиться, результаты в обоих случаях оказываются одинаковыми.

На практике, вместо того чтобы писать

$$\frac{1}{3}\,2 \quad \text{или} \quad 2\,\frac{1}{3},$$

обычно пишут несколько короче:

$$\frac{2}{3}.$$

Это читается: «две третьих». Такая «двухэтажная» запись называется *дробью*. Горизонтальная линия называется *дробной чертой*. Число, которое стоит *над* дробной чертой, называется *числителем*. Число, которое стоит *под* дробной чертой, называется *знаменателем*. Такая запись очень удобна, когда мы пишем математические формулы на бумаге или на школьной доске, но она плохо вписывается в строки сплошного текста. Поэтому «двухэтажную» дробь часто переписывают в «одноэтажном» виде

$$2\,/\,3$$

или применяют, так сказать, промежуточный вариант:

$$^2\!/_3.$$

«Одноэтажная» запись, $2/3$, содержит знакомый нам бинарный оператор деления

$$(\ldots)\,/\,(\ldots),$$

только на этот раз делимое не обязано делиться на делитель нацело. Поэтому операция, задаваемая этим оператором называется теперь не делением нацело, а просто *делением*, без всяких добавочных слов. В качестве знака деления может также использоваться двоеточие (главным образом в школьных учебниках):

$$(\ldots) : (\ldots).$$

В нашем курсе математики мы используем двоеточие только для обозначения деления с остатком. Кроме того, на клавишах калькуляторов для обозначения деления может применяться так называемый «обелюс»:

$$(\ldots) \div (\ldots).$$

Следует отметить, что в некоторых случаях результат операции деления оказывается равным целому числу, например:

$$15\,/\,3=\frac{15}{3}=15\,\frac{1}{3}=5\cdot 3\,\frac{1}{3}=5\cdot 1=5.$$

В этом случае новая операция деления превращается в деление нацело. А как записать результат, если числитель не делится нацело на знаменатель? Однозначного ответа на этот вопрос нет. В зависимости от ситуации мы будем представлять результат деления в разном виде. Об этом мы еще будем подробно говорить в будущем. Пока лишь замечу, что у математиков считается совершенно в порядке вещей представлять ответы на математические задачи в виде дробей — таких, как, например,

$$\frac{2}{3}.$$

Это само по себе считается вполне полноценным ответом и никаких дальнейших вычислений не требует.

Настало время сделать кое-какие обобщения и уточнить формулировки. Пусть дано целое число n, отличное от нуля (оно может быть как положительным или отрицательным). Это число, как мы знаем, задает оператор умножения:

$$n\,(...).$$

У этого оператора есть обратный оператор:

$$\frac{1}{n}\,(...).$$

(читается «одна энная» или «один поделить на эн»). Обратный оператор определяется таким образом, что выполняются следующие операторные равенства:

$$n\,\frac{1}{n}(...)=\frac{1}{n}\,n(...)=1(...),$$

или, если опустить многоточия:

$$\boxed{n\,\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\,n=1.}$$

Оператор

$$\frac{1}{n}$$

также называют *дробным числом*, обратным к числу n. Поэтому числа

$$n \text{ и } \frac{1}{n}$$

являются взаимнообратными. Действие оператора «одна энная» на произвольное целое число k

$$\frac{1}{n}\,k$$

называется *умножением* числа «одна энная» на число k. При этом выполняется свойство коммутативности (переместительности):

$$\frac{1}{n}\,k=k\,\frac{1}{n}.$$

Операция деления произвольного целого числа k на ненулевое целое число n записывается в виде «двухэтажной» дроби

$$\frac{k}{n}$$

или же в строчку

$$k\,/\,n \quad (\text{а также } {}^{k}\!/_{n})$$

и определяется как

$$\boxed{\;k\,/\,n = {}^{k}\!/_{n} \;=\frac{k}{n}\;\;=\;\;\frac{1}{n}\,k = k\,\frac{1}{n}.\;}$$

Иначе говоря, деление числа k на число n — это то же самое, что и умножение числа k на число, обратное к n.

При делении числа k на число n следует различать два случая:

Случай 1. Числа k и n связаны между собой соотношением

$$k = n \cdot m,$$

где m — какое-то целое число. Тогда, подействовав на обе части этого равенства оператором $1/n$, получаем:

$$\frac{k}{n} = m.$$

Фактически мы тут имеем дело с делением нацело, которое лишь надо дополнить следующими правилами расстановки знака «минус»:

$$\frac{-k}{n} = -m; \quad \frac{k}{-n} = -m; \quad \frac{-k}{-n} = m.$$

(Эти правила моментально следуют из подобных же правил для умножения.) Пусть, например, $k = 15$, $n = -3$. Тогда $15/(-3) = -5$. Мы говорим: «Пятнадцать поделить на минус три равно минус пяти».

Случай 2. k не делится нацело на n. Например, $k = 2$ и $n = 3$. Тогда говорят, что результат деления является *дробным числом*. При этом запись дробного числа, вообще говоря, ничем не отличается от записи операции деления (разве что иногда возможны кое-какие упрощения, речь о которых впереди). Так, мы можем сказать: «Два поделить на три равно две третьих», — однако и «два поделить на три», и «две третьих» записываются совершенно одинаково, а именно любым из трех способов:

$$\frac{2}{3}, \ \text{ или } \ {}^{2}\!/_{3}, \ \text{ или } \ 2\,/\,3.$$

Следует особо отметить, что умножение на ноль не имеет обратного оператора. Казалось бы, следуя общим правилам действия новых операторов деления, мы могли бы написать:

$$\frac{1}{0}\,0 = 1.$$

Проблема, однако, в том, что ноль, на который действует оператор, можно также представить в виде $0 \cdot 2$, или $0 \cdot 3$ и так далее. И тогда получается

$$\frac{1}{0}\,0 = \frac{1}{0}\,(0 \cdot 2) = 2,$$

или

$$\frac{1}{0}\,0 = \frac{1}{0}\,(0 \cdot 3) = 3.$$

Выходит, что выражение $\frac{1}{0}0$ может быть равно любому числу. Не то чтобы с этой неприятностью уж совсем нельзя было бороться, но мы пока этим заниматься на будем, а вместо этого просто введем строгое правило: *делить на ноль нельзя*.

Заметим также, что в сложных выражениях без скобок операция деления выполняется прежде операций сложения и вычитания. Таким образом, выражение

$$2 + 1\,/\,3$$

следует понимать как $2 + (1\,/\,3)$, а не как $(2 + 1)/3$. В этом смысле деление имеет ту же приоритетность, что и умножение. Вместе с тем, выражения без скобок, в которых одновременно присутствуют умножение и деление, могут вызывать некоторую путаницу. Вообще-то, принято считать, что в этом случае операции следует выполнять последовательно слева направо. Так,

$$12\,/\,3 \cdot 4 = (12\,/\,3) \cdot 4.$$

Однако почти та же самая запись с использованием переменных может иметь другой смысл:

$$a\,/\,3c = a\,/\,(3c).$$

Поэтому следует избегать записей вида $12/3 \cdot 4$ или $a/3c$ и либо прибегать к «двухэтажности», либо расставлять скобки, которые избавляют от неоднозначности.

Конспект

1. Два оператора называются *взаимно обратными*, если действие одного из них отменяется действие другого. Пример: $(\ldots) + 5$ и $(\ldots) - 5$. С помощью обратных операторов удобно решать уравнения. Подействовав, например, оператором -5 на обе части уравнения $x + 5 = 8$, получаем: $x = 3$.

2. Пусть n — любое целое число, отличное от нуля. У оператора умножения $n(\ldots)$ есть взаимно обратный оператор, который называется *одна энная* и записывается как $\frac{1}{n}(\ldots)$. В соответствии с определением взаимно обратного оператора,

$$\frac{1}{n}(n(...)) = n\Big(\frac{1}{n}(\ldots)\Big) = 1(\ldots)$$

или, короче, $\frac{1}{n}n = n\frac{1}{n} = 1$. Оператор $\frac{1}{n}$ способен действовать не только на число n, но и на любой другой объект x. При этом следует различать два случая.

Случай 1. Объект x можно разбить на n одинаковых частей, или, иначе говоря, его можно представить в виде $x = n \cdot y$, где y — это число или какая-то вещь. Тогда оператор $\frac{1}{n}$ превращает число n, входящее в этот объект, в единицу: $\frac{1}{n}(n \cdot y) = y$, например:

$$\tfrac{1}{n}(n \cdot 5) = 5,$$
$$\tfrac{1}{n}(n \text{ рублей}) = 1 \text{ рубль}.$$

Случай 2. Объект x нельзя разбить на n одинаковых частей. Тогда результат действия $\frac{1}{n}$ на x является оператором, определяемым как

$$(\tfrac{1}{n}x)(\ldots) = \tfrac{1}{n}(x(\ldots)).$$

Этот оператор «ждет своего часа»: когда-нибудь мы подставим сюда вместо $(\ldots)$ что-то такое, что можно разбить на n одинаковых частей и вернемся к случаю 1.

3. Оператор $\frac{1}{n}$ называют *дробным числом*, взаимно обратным к числу n. Его действие на произвольное целое число k, записываемое в виде $\frac{1}{n}k$, называется *умножением* числа $\frac{1}{n}$ на число k. Число $\frac{1}{n}$ можно умножать на число k не только справа, но и слева, при этом выполняются свойства коммутативности (переместительности)

$$\tfrac{1}{n}k = k\tfrac{1}{n}$$

и ассоциативности (сочетательности)

$$(\tfrac{1}{n}b)c = \tfrac{1}{n}(bc); \quad (a\tfrac{1}{n})c = a(\tfrac{1}{n}c); \quad (ab)\tfrac{1}{n} = a(b\tfrac{1}{n}).$$

(Здесь a, b и c являются целыми числами.) Это значит, что при вычислении произведения любого количества чисел мы вправе умножать их в любом порядке, даже если один из сомножителей равен $\frac{1}{n}$.

4. Операция деления произвольного целого числа k на ненулевое целое число n записывается в виде «двухэтажной» *дроби*, где k является *числителем*, а n — *знаменателем*,

$$\frac{k}{n}$$

или же в строчку k/n (а также ${}^{k}\!/_{n}$) и определяется как умножение числа k на число $\frac{1}{n}$:

$$\frac{k}{n} = {}^{k}\!/_{n} = k/n = \frac{1}{n}\,k = k\,\frac{1}{n}.$$

Иначе говоря, деление числа k на число n — это то же самое, что и умножение числа k на число, обратное к n. Если k представимо в виде $k = nm$, где m — некоторое целое число, то деление сводится к делению нацело.

5. Правила расстановки знака «минус»:

$$\frac{-k}{n} = -m; \quad \frac{k}{-n} = -m; \quad \frac{-k}{-n} = m.$$

6. Деление на ноль не определено. Делить на 0 нельзя.

3.7. Рациональные числа

В прошлый раз мы познакомились с дробями и упомянули о том, что они тоже называются числами. Речь идет о так называемых рациональных числах. Вообще, *рациональным* называют такое число, которое можно записать в виде дроби

$$\frac{a}{b},$$

где a и b — какие-либо целые числа, причем $b \neq 0$. Если a делится нацело на b, то число $\frac{a}{b}$ является целым, в противном случае оно называется дробным. (Заметим, что обычно в определении рациональных чисел знаменатель b объявляют не целым, а натуральным числом. Сути дела это нисколько не меняет.) Всякое целое число a является одновременно рациональным, поскольку оно представимо в виде $\frac{a}{1}$.

Почему же дроби называются числами? Потому что их можно складывать между собой, вычитать друг из друга, умножать одно на другое и делить друг на друга, и при этом они ведут себя так же, как и привычные нам целые числа — в том смысле, что все знакомые нам свойства арифметических действий остаются в силе. Давайте в этом убедимся.

В последующих рассуждениях мы будем считать, что $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и $\frac{p}{q}$ — это три произвольных рациональных числа (все числители и знаменатели — целые числа, причем знаменатели отличны от нуля). Начнем с умножения, которое мы определим так:

$$\Big(\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}\Big)(\ldots) = \frac{a}{b}\Big(\frac{c}{d}(\ldots)\Big).$$

Что делает оператор $\frac{c}{d}$? Он находит среди последующих сомножителей число d и заменяет его на число c. А что делает произведение операторов $\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}$? Согласно нашему определению, оно находит числа d и b и заменяет их на c и a:

$$\Big(\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}\Big)(b \cdot d \cdot x) = a \cdot c \cdot x.$$

Отсюда очевидно, что **умножение рациональных чисел** осуществляется по такому правилу:

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

Легко убедиться, что такое умножение обладает свойствами коммутативности («переместительности») и ассоциативности («сочетательности»):

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\,\frac{a}{b};\qquad \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\,\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}\right)\frac{p}{q}.$$

На менее формальном языке это означает, что мы можем произвольно менять порядок вычислений в произведении любого числа сомножителей.

Сокращение дробей. Если у дроби числитель и знаменатель равны между собой, то такая дробь, очевидно, равна единице:

$$\frac{b}{b}=1.$$

Отсюда

$$\boxed{\frac{a\cdot b}{d\cdot b}=\frac{a}{d}}$$

Таким образом, значение дроби не меняется, если числитель и знаменатель одновременно умножить или поделить на одно и то же число. Например,

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 3}{3\cdot 5}=\frac{2}{5}.$$

Одновременное деление числителя и знаменателя на одно и то же число b называют *сокращением дроби на число b*. Давно нам знакомое правило деления круглых чисел является, по сути дела, частным случаем сокращения на 10:

$$\frac{20}{30}=\frac{2\cdot 10}{3\cdot 10}=\frac{2}{3}.$$

Вот еще два полезных соотношения, которые получаются, если числитель и знаменатель дроби одновременно умножить (или поделить) на -1:

$$\boxed{\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b};\qquad \frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}}$$

Взаимно обратные дроби. Если целое число c не равно нулю, то у оператора $\frac{c}{d}(\ldots)$, очевидно, имеется взаимно обратный оператор, равный $\frac{d}{c}(\ldots)$. В самом деле

$$\frac{d}{c}\,\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\,\frac{d}{c}=1.$$

В этом случае говорят также о взаимно обратных дробях или взаимно обратных числах.

Деление числа $\frac{a}{b}$ на число $\frac{c}{d}$ определяется как произведение первого числа на число, обратное ко второму. Такое деление может быть записано в виде «многоэтажной» дроби:

$$\boxed{\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}$$

Этот же результат мы получим, если просто умножим числитель и знаменатель нашей «многоэтажной» дроби на bd:

$$\frac{\frac{a}{b}\,bd}{\frac{c}{d}\,bd} = \frac{ad}{cb}.$$

Сложение и вычитание дробей естественно определить так, чтобы выполнялось свойство дистрибутивности (которые в школе называется распределительным свойством умножения):

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)x = \frac{a}{b}x + \frac{c}{d}x.$$
$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)x = \frac{a}{b}x - \frac{c}{d}x.$$

Здесь x — любое число или вещь.

Сложение и вычитание дробей с одинаковым знаменателем. Рассмотрим такую цепочку равенств (для удобства здесь каждый знак равенства дополнен подходящим обоснованием):

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \\
&= a \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{b} = && \text{по определению дроби} \\
&= (a + c) \cdot \frac{1}{b} = && \text{дистрибутивность} \\
&= \frac{a + c}{b}. && \text{по определению дроби}
\end{aligned}$$

Заметим, что эта цепочка равенств осталась бы справедливой, если бы мы в ней всюду поменяли знак «плюс» на знак «минус». Таким образом, мы приходим к следующим правилам:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \\ \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b} \end{aligned}}$$

Сложение и вычитание дробей с разным знаменателем. Если знаменатели у дробей разные, то прежде чем их складывать, их надо заменить дробями с одинаковым знаменателем. Делается это так:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b}.$$

Это называется приведением дробей к одинаковому знаменателю. Точно такую же процедуру надо проделать, если мы имеем дело с вычитанием. Общие правила сложения и вычитания выглядят следующим образом:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \\ \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd} \end{aligned}}$$

Впрочем, во многих конкретных случаях задача сложения или вычитания дробей с разными знаменателями решается несколько проще. Например:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2+1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}.$$

Или:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}.$$

Противоположные числа. Два рациональных числа называются *противоположными*, если их сумма равна нулю. Пусть $\frac{a}{b}$ — произвольное рациональное число, тогда число, ему противоположное, обозначается как

$$-\frac{a}{b} \ \text{ или } \ -(a\,/\,b).$$

Очевидно, что

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}.$$

Нетрудно также убедиться, что разность чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равна сумме чисел $\frac{a}{b}$ и $-\frac{c}{d}$. Действительно, складываем $\frac{a}{b}$ и $-\frac{c}{d}$ и получаем тот же результат, как если бы мы вычисляли разность $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}=\frac{ad+(-c)b}{bd}=\frac{ad-cb}{bd}.$$

Немного о терминологии. Какую часть (или какую долю) число 1 составляет от числа 7? Разумеется, одну седьмую, то есть $\frac{1}{7}$. В общем случае дробь $\frac{x}{y}$ говорит нам о том, сколько (и каких) частей число x составляет от числа y (x и y — произвольные рациональные числа, $y \neq 0$):

число 2 составляет $\dfrac{2}{3}$ (две трети) от числа 3

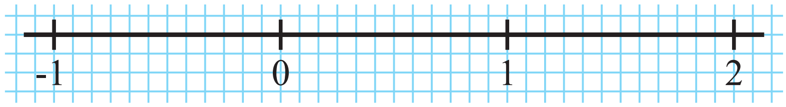
или: $\dfrac{2}{3}$ (две трети) от числа 3 равно 2;

$\dfrac{3}{2}$ (три вторых) от числа $\dfrac{1}{3}$ равно $\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$

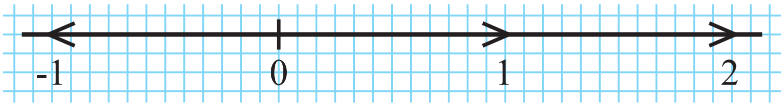
или: число $\dfrac{1}{2}$ составляет $\dfrac{1}{2}\Big/\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{2}$ (три вторых) от числа $\dfrac{1}{3}$.

Число, выражаемое дробью $\frac{x}{y}$, называют *отношением* чисел x и y. Уже знакомое нам слово *частное* тоже, разумеется, можно употреблять в этом значении.

Числовая прямая. Рациональные числа удобно ассоциировать с точками на бесконечной прямой. Делается это так. Рисуем прямую линию и с помощью засечек отмечаем на ней в произвольных местах две разные точки. Одна из этих точек символизирует число «ноль», другая — число «единица». (Обычно эту линию чертят горизонтально, а единицу располагают правее нуля, но это необязательно.) Расстояние между этими двумя точками принимаем за единичную длину. Далее, мы равномерно покрываем засечками всю нашу прямую, так чтобы расстояние между соседними засечками равнялось единичной длине, и нумеруем их целыми числами.

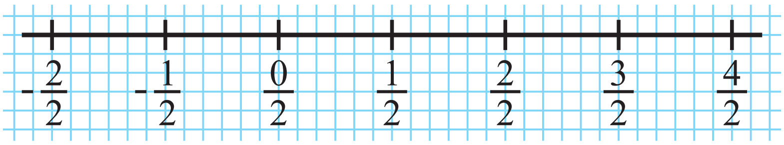


Помните, когда мы только начинали говорить о целых числах, мы ассоциировали их со ступеньками лестницы, по которой можно было подняться вверх или спуститься вниз? Теперь же наше представление о числах в очередной раз обогатилось, и они предстали перед нами в виде точек на прямой. Но, как и ранее, мы можем с тем же успехом считать, что числа — это команды по перемещению вдоль линии, и представлять их себе не как засечки, а как протяженные отрезки-стрелочки, у которых есть начало и конец, причем начало совпадает с нулем, а конец приходится на ту или иную засечку:



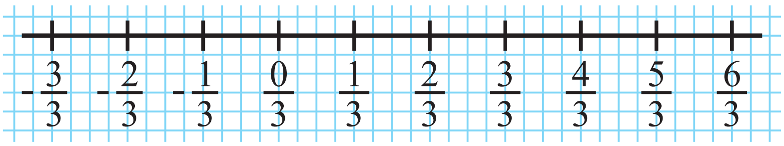
Знак перед числом («минус» или подразумеваемый «плюс») указывает, в какую сторону направлена стрелочка, а «голое» число без знака представляет собой длину отрезка: оно говорит нам о том, сколько единичных длин укладывается между его началом и концом. Но рисовать стрелочки не так удобно, как засечки, поэтому мы будем всё же пользоваться засечками.

Разделим отрезок между нулем и единицей на две равные части, поставив посередине новую засечку и пометив ее числом $\frac{1}{2}$. Расстояние от нуля до этой засечки задает нам новую длину, равную одной второй от единичной длины. Покроем нашу прямую новой порцией засечек, так чтобы расстояние между соседними засечками равнялось новой длине. Пронумеруем новые засечки целыми числами, приписав к ним через дробную черту знаменатель 2:

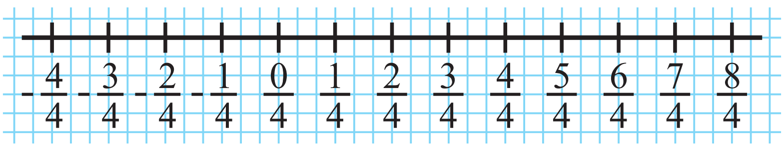


Как и следовало ожидать, часть новых засечек совпала со старыми.

Повторим еще раз эту же процедуру с той разницей, что теперь мы будем делить отрезок между нулем и единицей не на две, а на три части. Для этого нам понадобятся две новые засечки. Берем ту из них, которая ближе расположена к нулю и помечаем ее числом $\frac{1}{3}$. После расстановки и нумерации очередной порции засечек получаем следующую картину (во избежание путаницы тут показаны только дроби со знаменателем 3):



И так далее и тому подобное. Покажем, пожалуй, еще рисунок с дробями со знаменателем 4 и на этом остановимся:



Каким бы ни было рациональное число $\frac{a}{b}$, для него обязательно найдется соответствующая точка на нашей числовой прямой. Про эту точку тогда говорят, что ее *положение* равно $\frac{a}{b}$ (или же ее *координата* равна $\frac{a}{b}$). Следует только заметить, что если нам попадется дробь с отрицательным знаменателем, например $\frac{2}{-3}$, то, прежде чем откладывать ее на числовой прямой, мы сократим ее на -1:

$$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Спрашивается: а как можно поделить отрезок на какое-нибудь заранее заданное число одинаковых частей? Вообще-то, для этого есть специальная процедура, с которой мы познакомимся, когда будем заниматься геометрией. А пока — мы будем делать это «на глазок» или, еще лучше, мы будем чертить наши рисунки на бумаге в клеточку и заранее выбирать длину единичного отрезка таким образом, чтобы его можно было легко разделить «по клеточкам».

Сравнение рациональных чисел. Проще всего сравнивать числа с нулем. Если некоторое рациональное число $x = \frac{a}{b}$ (точнее, соответствующая ему засечка) располагается на нашей числовой прямой справа от нуля (точнее, с той же стороны, что и единица), то про него говорят, что оно положительное и что оно больше нуля: $\frac{a}{b} > 0$. Если же оно расположено с другой стороны, то оно отрицательное и, соответственно, меньше нуля: $\frac{a}{b} < 0$. Вообще, запись

$$x > y$$

означает, что число x правее (то есть больше) числа y, а одинаковая по смыслу запись

$$y < x$$

означает, что число y левее (то есть меньше) числа x.

Пусть x и y — произвольные рациональные числа, так что $x = \frac{a}{b}$ и $y = \frac{c}{d}$. Как определить, которое из них меньше, а которое больше? Если подходить к делу чисто формально, то можно просто посчитать их разность

$$x - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}.$$

и сравнить ее с нулем. Если окажется, что результат больше нуля, тогда $x > y$. Если результат меньше нуля, тогда $x < y$. Для полноты картины следует отметить, что результат может оказаться равен нулю. В этом случае $x = y$.

Но если проявлять творческий подход, то оказывается, что во многих случаях дроби можно сравнивать не производя никаких вычислений. Например, сразу видно, что

$$\frac{3}{7} < \frac{4}{7},$$

потому что у обеих этих дробей знаменатели одинаковы и — что тоже немаловажно — положительны, а числитель у первой дроби меньше, чем у второй. А как быть, если числители одинаковы, но отрицательны? Как сравнить, например,

$$\frac{3}{-7} \text{ и } \frac{4}{-7}\ ?$$

Сделаем знаменатели положительными, сократив каждую из дробей на -1, и тогда сразу станет ясно, что

$$\frac{3}{-7} = \frac{-3}{7} > \frac{-4}{7} = \frac{4}{-7}.$$

Также нетрудно видеть, что

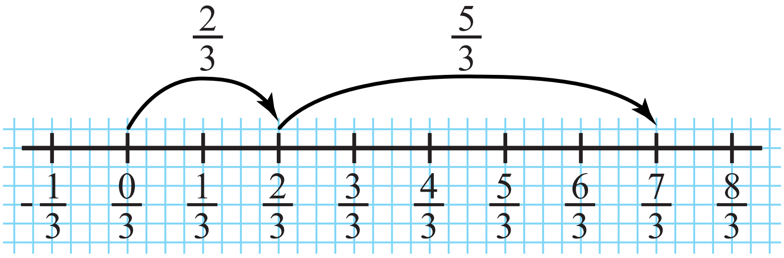
$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}.$$

Вообще, если у двух положительных дробей числители одинаковы, то меньше та из них, у которых знаменатель больше. У отрицательных дробей — всё наоборот.

Смещение вдоль числовой прямой. Когда мы рассматриваем отдельные рациональные числа, взятые сами по себе, их удобно представлять себе как точки на числовой прямой. Но когда мы переходим к операциям сложения и вычитания, то уместнее говорить о *смещениях* вдоль этой прямой — точно так же, как мы говорили о прыжках по лестнице, когда имели дело с целыми числами. Пусть, например, нам дан такой пример:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}.$$

Глядя на числовую прямую, мы можем сказать, что мы начинаем движение из точки $\frac{2}{3}$, перемещаемся вправо на расстояние $\frac{5}{3}$ и оказываемся в точке $\frac{7}{3}$:



Таким образом, первое число в этом примере $(+\frac{2}{3})$ — это точка, а второе $(+\frac{5}{3})$ — это команда на смещение. Как мы знаем, числа позволительно интерпретировать и так, и этак. Но если мы хотим единообразия, то мы можем представить себе, что мы начинаем движение из точки 0 и передвигаемся два раза. Первый раз — на величину $+\frac{2}{3}$, а второй раз — на величину $+\frac{5}{3}$. В этом случае оба слагаемых являются командами на смещение. Точка на числовой прямой соответствует тому же числу, что и команда смещения, которая перемещает нас из нуля в эту точку. Если нам даны два рациональных числа, например, $\frac{2}{3}$ и $\frac{7}{3}$, то команда, перемещающая нас из первой точки во вторую, — это разность $\frac{7}{3} - \frac{2}{3}$, в которой из второго числа вычитается первое.

Смещение сохраняет разность между числами. Это значит, что если две точки x и y сместить на одинаковую величину z, то разность между новым положением точек останется неизменной:

$$(y + z) - (x - z) = y - x.$$

Масштабирование. Но числа — это не только точки, не только команды на смещение, это в первую очередь, конечно, операторы умножения, которые меняют количество тех вещей, на которые они действуют. Пока мы имели дело с целыми числами, мы могли только увеличивать это количество, например, из (одной) конфеты сделать 3 конфеты. Теперь же, благодаря рациональным числам, мы можем менять количество вещей как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения, например, три конфеты превратить снова в одну (с помощью оператора $\frac{1}{3}$), а из одной конфеты получить половинку (с помощью оператора $\frac{1}{2}$).

Такие команды умножения (или уменьшения) можно, разумеется, применять и к точкам на числовой прямой. Действие этих команд в таком случае называется *масштабированием*. Например, применяя команду масштабирования $\frac{2}{3}$ к точке $\frac{4}{5}$, мы оказываемся в точке

$$\frac{2}{3}\frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$$

Точка на числовой прямой соответствует тому же числу, что и команда масштабирования, которую надо применить к единице, чтобы попасть в эту точку.

Масштабирование сохраняет отношение между числами. Если одно и то же масштабирование s применить к двум точкам x и y, то отношение между их новым положением останется неизменным:

$$\frac{sx}{sy} = \frac{x}{y}.$$

Абсолютная величина (модуль) числа — это то, что мы называли «голым» числом с отброшенным знаком. Если число отрицательное и перед ним стоит знак «минус», то после отбрасывания знака такое число превращается в противоположное. Если перед числом не стоит никакого знака (а подразумевается «плюс»), то отбрасывать, собственно, нечего и число остается самим собой. Модуль числа x обозначается как $|x|$. Формальное определение модуля выглядит следующим образом:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}}$$

Как мы знаем, всякому рациональному числу x соответствует некоторая точка на числовой прямой. Модуль числа x можно понимать как расстояние от этой точки до отметки «ноль». Расстояние между двумя точками, которые соответствуют некоторым произвольным числам x и y, равно:

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geqslant y; \\ y - x, & \text{если } x < y. \end{cases}$$

Расстояние — это величина в любом случае неотрицательная. Расстояние от точки с координатой x до точки с координатой y в точности равно расстоянию от точки с координатой y до точки с координатой x. (Ради простоты выражений, допустимо также говорить «расстояние между числами x и y».)

Правильные, неправильные и смешанные дроби. Дроби, значение которых по абсолютной величине (по модулю) меньше единицы, называются *правильными*. Их внешний вид сравнительно легок для восприятия:

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ -\frac{6}{7}\ \text{ и тому подобное.}$$

Дроби, которые по абсолютной величине больше или равны единице, называются *неправильными*. Как правило, они воспринимаются на глаз гораздо труднее:

$$\frac{15}{2},\ \frac{14}{5},\ -\frac{60}{7}.$$

Чтобы облегчить восприятие, неправильные дроби часто записывают в виде так называемых смешанных чисел. Делается это следующим образом. Допустим, мы хотим записать в виде смешанного числа дробь

$$\frac{15}{2}.$$

Выполним соответствующее деление с остатком:

$$15 : 2 = 7\ (\text{ост. } 1).$$

Результат этого деления можно записать таким образом:

$$15 = 2 \cdot 7 + 1.$$

Подействуем на обе части этого выражения оператором $\frac{1}{2}$:

$$\frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2}.$$

Про такую запись говорят, что число $\frac{15}{2}$ выражено в виде суммы *целой части* 7 и *дробной части* $\frac{1}{2}$. Эту запись иногда сокращают до такого вида:

$$\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2} \quad \text{(«семь целых и одна вторая»).}$$

То, что стоит в правой части этого равенства, $7\frac{1}{2}$, называется *смешанной дробью* или *смешанным числом*. Оно также может быть записано в виде $7\,{}^1\!/_2$. Сразу возникает недоуменный вопрос: как же так? Ведь мы до сих пор придерживались обозначений, согласно которым запись $7\frac{1}{2}$ должна означать произведение чисел 7 и $\frac{1}{2}$, то есть $7 \cdot \frac{1}{2}$, а вовсе не их сумму $7+\frac{1}{2}$. Приходится признать, что такая запись действительно имеет два совершенно разных смысла. Но путаницы всё же, как правило, не возникает, потому что из сопровождающих пояснительных слов бывает ясно, что именно имеется в виду.

Отрицательные смешанные числа записываются следующим образом:

$$-\frac{60}{7} = -8\,\frac{4}{7}.$$

Это на самом деле означает:

$$-\frac{60}{7} = -8 - \frac{4}{7}.$$

Здесь -8 это целая часть отрицательного числа, а $-\frac{4}{7}$ это дробная часть.

Запись рациональных чисел в виде смешанных дробей облегчает вычисления при выполнении операций сложения и вычитания, например:

$$\begin{aligned}\frac{15}{2} + \frac{14}{3} = 7\frac{1}{2} + 4\frac{2}{3} &= \Big(7+4\Big) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \\ &= \Big(7+4\Big) + \left(\frac{3}{6} + \frac{4}{6}\right) = 11 + \frac{7}{6} = 11 + 1\frac{1}{6} = 12\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Если смешанную дробь требуется перевести обратно в неправильную, то это делается так:

$$12\frac{1}{6} = \frac{12 \cdot 6}{6} + \frac{1}{6} = \frac{12 \cdot 6 + 1}{6} = \frac{72+1}{6} = \frac{73}{6}.$$

Конспект

1. Рациональное число — это дробь $\frac{a}{b}$, где a и b — это целые числа, причем $b \neq 0$.

2. Для рациональных чисел определены:

умножение $\dfrac{a}{b}\dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$,

деление $\dfrac{a}{b}\Big/\dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}\dfrac{d}{c}$,

а также сложение и вычитание

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \qquad \text{(одинаковые числители),}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}, \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{bd} \qquad \text{(разные числители).}$$

Для сложения и умножения выполняются свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности (на школьном языке эти свойства называются переместительным, сочетательным и распределительным).

3. Рациональные числа x и y можно сравнивать между собой: $x > y$, если $x - y > 0$; $x < y$, если $x - y < 0$; $x = y$, если $x - y = 0$.

4. Пусть x и y — рациональные числа. Результат деления $\frac{x}{y}$ называется их *отношением* (синоним слову частное). Также говорят, что x составляет $\frac{x}{y}$ (икс игрековых частей) от числа y, например, число 2 составляет $\frac{2}{3}$ (две третьих) от числа 3.

5. Всякому рациональному числу $\frac{a}{b}$ можно сопоставить определенную точку на *числовой прямой*, каковая представляет собой прямую линию, где заранее отмечено положение нуля и единицы. Про эту точку тогда говорят, что ее *положение* равно $\frac{a}{b}$ (или ее *координата* равна $\frac{a}{b}$). Оператор сложения $(\ldots) + x$, где x — рациональное число, задает операцию *смещения* вдоль числовой прямой. Оператор умножения $x\,(\ldots)$ задает операцию *масштабирования*. Смещение сохраняет разность между положениями точек. Масштабирование сохраняет отношение между ними.

6. Числа $\frac{a}{b}$ и $-\frac{a}{b}$ называются противоположными. Числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ называются взаимно обратными ($a \neq 0$, $b \neq 0$). Абсолютная величина (модуль) числа x — это число x с отброшенным знаком:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Расстояние между точками на числовой прямой, которым соответствуют числа x и y, определяется как $|y - x|$.

7. Дроби, которые по абсолютной величине меньше единицы, называются *правильными*. Дроби, которые по абсолютной величине больше или равны единице, называются *неправильными*. Неправильную положительную дробь иногда записывают в виде *смешанного* числа, которое представляет собой сумму натурального числа (*целой части*) и правильной дроби (*дробной части*), при этом знак «плюс», который должен был бы стоять между этими двумя частями, опускается, например, $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$. Неправильная отрицательная дробь также может быть записана в виде смешанного числа: $-2\frac{1}{3} = -2 - \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$.

3.8. Разложение на множители. Признаки делимости

Рассмотрим дробь

$$\frac{1092}{1638}\,.$$

Спрашивается: можно ли ее сократить и, если можно, то как? Поиском ответа на подобного рода вопросы мы сейчас и займемся.

Простые и составные числа

До сих пор задачи на умножение для нас заключались в том, чтобы по двум или нескольким сомножителям найти их произведение. Теперь попробуем решить *обратную* задачу. Нам дано какое-то натуральное число, и от нас требуется *разбить его на множители*, то есть подобрать такой пример на умножение с натуральными числами, результатом которого как раз является данное число. Вообще говоря, эта задача может иметь несколько решений. Например, число 30 можно разбить на множители следующими пятью способами:

$$30 = 1 \cdot 30;$$
$$30 = 2 \cdot 15;$$
$$30 = 3 \cdot 10;$$
$$30 = 5 \cdot 6;$$
$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Вместе с тем, число 31 разбивается на множители единственным способом:

$$31 = 1 \cdot 31.$$

Можно еще менять сомножители местами, но мы условимся считать, что это не прибавляет новых способов. Также не добавляет новых способов умножение на единицу. Смысл следующих записей является для нас совершенно одинаковым:

$$31 = 1 \cdot 31;$$
$$31 = 31 \cdot 1;$$
$$31 = 1 \cdot 31 \cdot 1.$$

Говорят, что натуральное число k *кратно* натуральному числу d, если k можно разбить на множители таким образом:

$$k = n \cdot d,$$

где n — тоже какое-то натуральное число. При этом число d называется *делителем* числа k.

Например, число 30 кратно каждому из восьми своих делителей: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30, в то время как число 31 кратно только двум числам: 1 и 31.

Натуральное число, у которого есть в точности два различных делителя, называется *простым*. (При этом неизбежно оказывается, что один из делителей — это единица, а второй делитель равен самому этому числу.) Например, простым является число 31. Что касается натуральных чисел, у которых имеется больше двух делителей, то они называются *составными*. Число 30 — это типичное составное число.

Давайте выпишем первые несколько натуральных чисел и посмотрим, какие из них простые, а какие составные:

1 — не является ни простым, ни составным, так как у него только один делитель;

2 — простое;

3 — простое;

$4 = 2 \cdot 2$ — составное;

5 — простое;

$6 = 2 \cdot 3$ — составное;

7 — простое;

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ — составное;

$9 = 3 \cdot 3$ — составное;

$10 = 2 \cdot 5$ — составное;

11 — простое;

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ — составное;

13 — простое.

Процедура разложения на простые множители

Напомню, что мы начали эту главу с задачи о том, как можно сократить дробь

$$\frac{1092}{1638}.$$

Мы уже на полпути к ответу. Давайте разложим на простые множители числитель и знаменатель этой дроби и выясним, что из этого получится. Прежде всего рассмотрим числитель, то есть число 1092. Попытаемся найти какой-либо его делитель. Для этого будем брать все числа подряд и проверять, не подойдут ли они в качестве делителя. Начнем с двойки. Просто поделим наше число на 2:

$$\frac{1092}{2} = 546.$$

В результате получилось целое число. Значит, двойка действительно является делителем, и мы можем разложить наше число на множители в таком виде:

$$1092 = 2 \cdot 546.$$

Возьмем второй сомножитель в этом выражении и проверим его на делимость на двойку:

$$\frac{546}{2} = 273.$$

Результатом снова оказалось целое число. Разложение на множители можно продолжить следующим образом:

$$1092 = 2 \cdot 2 \cdot 273.$$

Далее, опять берем из полученного выражения последний сомножитель и выясняем, не кратен ли он двойке:

$$\frac{273}{2} = 136\frac{1}{2}.$$

На этот раз мы не получили целого числа. Следовательно, на этот раз на роль очередного делителя двойка не подходит. Пробуем тройку:

$$\frac{273}{3} = 91.$$

Тройка подошла. Значит, мы можем записать так:

$$1092 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 91.$$

Проверяем тройку повторно:

$$\frac{91}{3} = 30\frac{1}{3}.$$

Тройка больше не подходит. Берем четверку? Нет, четверку проверять не нужно. Четверка — это составное число, в «состав» которого входят две двойки:

$$4 = 2 \cdot 2.$$

Мы уже знаем, что число 91 на двойку не делится. Следовательно, на число $2 \cdot 2$ оно не делится и подавно. По аналогичной причине, нам вообще не нужно проверять делимость на какие-либо составные числа. Пропускаем четверку и устраиваем проверку следующему простому числу, то есть пятерке:

$$\frac{91}{5} = 18\frac{1}{5}.$$

Пятерка не подошла. Шестерку, как составное число, пропускаем. Следующий «кандидат» в делители — это семерка:

$$\frac{91}{7} = 13.$$

Семерка подходит. Разложение на множители принимает вид:

$$1092 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13.$$

Надо ли нам теперь проверять последний множитель 13 на делимость на 7? Нет, не надо. Это не надо делать по той причине, что 13 меньше, чем $7 \cdot 7$:

$$13 < 7 \cdot 7 = 49.$$

Все числа, которые меньше, чем 49, и которые при этом делятся на 7, можно записать в виде $n \cdot 7$, где n — какое-то натуральное число, которое должно быть меньше, чем 7. Но все такие числа мы уже проверили и выяснили, что на роль делителей они не подходят. Значит, число 13, будучи меньше, чем 49, не может делиться на семерку. По этой же причине нет смысла проверять, делится ли 13 на числа, которые больше 7. Отсюда мы заключаем, что 13 — простое число. И действительно, в списке чисел, который мы выписали выше, оно значится как простое. Вообще, процедуру разложения на множители следует прекращать тогда, когда «кандидат» в делители (в данном случае 7), умноженный сам на себя ($7 \cdot 7$), оказывается больше, чем последний (то есть самый большой) множитель разложения (13).

Итак, мы разложили числитель дроби

$$\frac{1092}{1638}$$

на простые множители:

$$1092 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13.$$

С помощью точно такой же процедуры раскладываем на простые множители знаменатель и получаем:

$$1638 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13.$$

Теперь, чтобы сократить дробь, достаточно просто вычеркнуть пары одинаковых чисел сверху и снизу:

$$\frac{1092}{1638} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{13}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{13}} = \frac{2}{3}\,.$$

Замечание. Мы заодно убедились в справедливости так называемой основной теоремы арифметики: всякое натуральное число, которое больше двух, можно единственным образом представить в виде произведения простых чисел. (При этом формально считается, что произведение может состоять всего из одного сомножителя. Именно такие «усеченные» произведения получаются, когда мы раскладываем на множители простые числа.)

Разумеется, не всякая дробь может быть сокращена, но это становится ясно опять-таки после того, как мы раскладываем числитель и знаменатель на простые множители. Вот пример такой несократимой дроби:

$$\frac{28}{45} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{3 \cdot 3 \cdot 5}.$$

Признаки делимости

Процедура разложения натурального числа на простые множители существенно упростилась бы, если бы проверку на делимость можно было делать каким-нибудь быстрым способом, не выполняя в реальности трудоемкую операцию деления. Такая возможность действительно есть. Для этого надо воспользоваться признаками делимости.

Мы уже знаем признак делимости на 10. Этот признак можно сформулировать с помощью двух фраз:

(1) Всякое натуральное число, которое оканчивается цифрой 0, делится на 10.

(2) Всякое натуральное число, которое оканчивается любой другой цифрой, на 10 не делится.

Если воспользоваться формальным математическим языком, то эти две фразы можно объединить в одну:

> Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда оно оканчивается нулем.

Отметим, что словосочетание «тогда и только тогда» несколько избыточно. Достаточно было бы сказать просто «только тогда». Но так уж у математиков принято выражаться, и мы не будем нарушать эту традицию. В то же время, когда мы говорим «число делится на 10», то подразумеваем не просто «делится», а «делится нацело». Также заметим, что хотя мы формулируем признаки делимости для натуральных чисел, они с тем же успехом подходят и для целых чисел: если a делится на b, то и $(-a)$ делится на b.

Таким образом, если нам нужно будет разложить на простые множители какое-либо число, которое оканчивается нулем, например 5670, то мы начнем с того, что напишем:

$$5670 = 2 \cdot 5 \cdot 567.$$

А если число оканчивается двумя нулями? Тогда будем писать так:

$$56700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 567.$$

Признак делимости на 2. Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2, то есть равна 0, 2, 4, 6 или 8.

Целые числа, которые делятся на 2, называются *четными*. Целые числа, которые не делятся на 2, называются *нечетными*.

Признак делимости на 5. Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 5, то есть равна 0 или 5.

Как бы ни было очевидно это утверждение, давайте его докажем со всей математической строгостью. Это нам пригодится, когда мы перейдем к признакам делимости на другие числа. Пусть нам дано произвольное натуральное число a, про которое мы хотим знать, делится ли оно на 5 или нет. Представим его в виде

$$a = n \cdot 10 + b,$$

где n — это число полных десятков в числе a (то есть число a с отброшенным последним знаком), а b — однозначное число, выраженное последней цифрой числа a. После несложных преобразований получаем:

$$a = 2n \cdot 5 + b = m \cdot 5 + b,$$

где мы ввели новое обозначение, а именно $m = 2n$. Поскольку нас интересует делимость на 5, поделим это равенство на 5:

$$a/5 = m + b/5.$$

Отсюда видно, что число a делится на 5 тогда и только тогда, когда на 5 делится число b. Прелесть этого утверждения заключается в том, что число a может быть очень большим. Оно может состоять из очень многих цифр, и, вероятно, нам потребовалось бы весьма много времени, если бы мы в самом деле захотели поделить его на 5. Но нам этого вовсе не нужно! Достаточно просто взглянуть на число b, которое настолько маленькое, что мы сразу же можем сказать, делится ли оно на 5 или нет. По этой причине b называется *проверочным числом*. В принципе, на роль проверочного подойдет любое достаточно малое число, которое можно записать в виде

$$a - b = m \cdot 5.$$

Здесь a — по-прежнему произвольное натуральное число, делимость которого мы хотим установить, а $m \cdot 5$ обозначает просто некоторое число, делящееся на 5.

Перейдем к обобщениям. Почти все признаки делимости, с которыми мы будем иметь дело, формулируются примерно одинаково: число a делится на число d тогда и только тогда, когда число b делится на d. При этом проверочное число b может быть легко получено из числа a, а чтобы доказать признак делимости, достаточно убедиться, что разность $a - b$ кратна d, то есть представима в виде $m \cdot d$ (где m, как и ранее, — некоторое натуральное число).

Признак делимости на 3. Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Например, число 123 делится на 3, поскольку $1 + 2 + 3 = 6$ делится на 3.

Действительно, представим произвольное натуральное число a в виде:

$$a = \ldots + v \cdot 10000 + w \cdot 1000 + x \cdot 100 + y \cdot 10 + z,$$

где под буквами v, w, x, y, z подразумеваются значения соответствующих разрядов числа a, а многоточие $(\ldots)$ говорит о том, что вместо него могут присутствовать еще и другие слагаемые. Тогда «проверочное число» b равно

$$b = \ldots + v + w + x + y + z.$$

Разность чисел a и b представима в виде:

$$\begin{aligned}
&a - b = \\
&\ldots + 9999 \cdot v + 999 \cdot w + 99 \cdot x + 9 \cdot y = \\
&3 \cdot 3 \cdot (\ \ldots + 1111 \cdot v + 111 \cdot w + 11 \cdot x + 1 \cdot y).
\end{aligned}$$

Ясно, что эта разность кратна трем, что и доказывает данный признак делимости. Более того, эта разность кратна девяти. Поэтому отсюда же мы получаем —

признак делимости на 9. Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Например, число 234 делится на 9, поскольку $2 + 3 + 4 = 9$ делится на 9.

Признак делимости на 7. Пусть a — произвольное целое число, причем его последняя цифра равна v, а число, которое получается после отбрасывания последней цифры, равно u:

$$a = u \cdot 10 + v.$$

Число a делится на 7 тогда и только тогда, когда делится на 7 число

$$b = u - 2 \cdot v.$$

Иными словами, проверочное число получается, если из проверяемого числа с отброшенной последней цифрой вычесть удвоенную последнюю цифру. Например, число 112 делится на 7, поскольку $11 - 2 \cdot 2 = 7$ делится на 7.

Для доказательства этого утверждения мы рассмотрим не разность $a - b$, а сумму $2a + b$. Мы как бы подменяем задачу и рассматриваем делимость не числа a, а числа $2a$, причем в качестве проверочного числа берем не b, а $(-b)$. Но такая подмена совершенно законна, потому что числа a и $2a$ одновременно либо делятся на 7, либо не делятся (в разложении того и другого на простые множители семерка либо присутствует, либо нет). То же самое можно сказать и про числа b и $(-b)$. Для указанной суммы имеем:

$$2 \cdot a + b = 2(u \cdot 10 + v) + (u - 2 \cdot v) = 20 \cdot u + 2 \cdot v + u - 2 \cdot v = 21 \cdot u = 3 \cdot 7 \cdot u.$$

Таким образом, мы получили число, кратное семи. Доказательство завершено.

Признак делимости на 11. Натуральное число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма его цифр, взятых с чередующимися знаками, делится на 11. Например, число 759 делится на 11, поскольку $7 - 5 + 9 = 11$ делится на 11.

Прежде чем приводить доказательство, заметим, что следующие числа делятся на 11:

$99 = 11 \cdot 9;$
$1001 = 990 + 11 = 11 \cdot 90 + 11 = 11 \cdot 91;$
$9999 = 11 \cdot 909;$
$100001 = 99990 + 11 = 11 \cdot 9090 + 11 = 11 \cdot 9091;$
$999999 = 11 \cdot 90909;$
и так далее.

Запишем, как мы это уже делали раньше, число a в виде:

$$a = \ldots + u \cdot 100000 + v \cdot 10000 + w \cdot 1000 + x \cdot 100 + y \cdot 10 + z.$$

Тогда проверочное число равно

$$b = \ldots - u + v - w + x - y + z.$$

Вычитая b из a, получаем:

$$a - b =$$
$$... + u \cdot 100001 + v \cdot 9999 + w \cdot 1001 + x \cdot 99 + y \cdot 11 =$$
$$11 \cdot (9091 \cdot u + 909 \cdot v + 91 \cdot w + 9 \cdot x + y).$$

Для полноты картины приведем еще признаки делимости на 4, на 6 и на 8. (Впрочем, поскольку это всё составные числа, практическая польза от этих признаков невелика.)

Признак делимости на 4. Натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры делятся на 4.

Признак делимости на 8. Натуральное число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры делятся на 8.

Признак делимости на 6. Натуральное число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3.

Признак «неделимости»

Конечно, хорошо было бы иметь также признак, с помощью которого можно было бы быстро определить, является ли данное число простым или нет. К сожалению, такого признака не существует. Вместо этого приходится обращаться к таблице простых чисел, которую можно найти, например, в Википедии.

Запись разложения на простые множители

Теперь у нас есть полный набор инструментов для разложения чисел на простые множители. При этом удобно пользоваться записью «в столбик», которую мы покажем на примере разложения числа 4340:

$$\begin{array}{r|l} 4340 & 2 \cdot 5 \\ 434 & 2 \\ 217 & 7 \\ 31 & 31 \end{array}$$

Конспект

1. Натуральное число k называется *кратным* натуральному числу d, если k делится нацело на d, то есть если $k = n \cdot d$, где n — тоже какое-то натуральное число. При этом число d называется *делителем* числа k. Например, число 30 имеет восемь делителей: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30. Число 31 имеет только два делителя: 1 и 31.

2. Натуральное число, у которого есть в точности два различных делителя, называется *простым*. (При этом неизбежно оказывается, что один из делителей — это единица, а второй делитель равен самому этому числу.) Например, простым является число 31. Натуральное число, у которых имеется больше двух делителей, называется *составным*. Таковым является, например, число 30.

3. Чтобы сократить какую-либо дробь — например, $1092/1638$ — мы раскладываем ее числитель и знаменатель на простые множители, а затем вычеркиваем пары одинаковых чисел сверху и снизу:

$$\frac{1092}{1638} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{13}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{13}} = \frac{2}{3}\,.$$

Не всякая дробь может быть сокращена, например,

$$\frac{28}{45} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{3 \cdot 3 \cdot 5}.$$

4. При разложении чисел на простые множители удобно пользоваться *признаками делимости*, которые формулируются следующим образом: a делится на d тогда и только тогда, когда b делится на d. При этом a может быть очень большим, а *проверочное число* b, легко вычисляемое по числу a, является, напротив, сравнительно маленьким. Чтобы доказать признак делимости, достаточно установить, что разность $a - b$ делится на d.

Проверочные числа b, используемые в признаках делимости числа a на число d:

Делитель d	Проверочное число b
2	Последняя цифра числа a
3	Сумма цифр числа a
4	Последние две цифры числа a
5	Последняя цифра числа a
6	(См. делимость на 2 и 3)
7	Число a с отброшенной последней цифрой минус удвоенная последняя цифра
8	Последние три цифры числа a
9	Сумма цифр числа a
10	Последняя цифра числа a
11	Сумма цифр числа a, взятых с чередующимся знаком

5. Целые числа, которые делятся на 2, называются *четными*. Целые числа, которые не делятся на 2, называются *нечетными*.

6. При разложении чисел на простые множители удобно пользоваться записью «в столбик», например:

$$\begin{array}{r|l} 4340 & 2\cdot 5 \\ 434 & 2 \\ 217 & 7 \\ 31 & 31 \end{array}$$

3.9. НОД и НОК: наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Множество делителей

Рассмотрим такую задачу: найти делитель числа 140. Очевидно, что у числа 140 не один делитель, а несколько. В таких случаях говорят, что задача имеет *множество* решений. Найдем их все. Прежде всего разложим данное число на простые множители:

$$140 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 7.$$

Теперь мы без труда можем выписать все делители. Начнем с простых делителей, то есть тех, которые присутствуют в разложении, приведенном выше:

$$2,\ 5,\ 7.$$

Затем выпишем те, которые получаются попарным умножением простых делителей:

$$2\cdot 2 = 4,\quad 2\cdot 5 = 10,\quad 2\cdot 7 = 14,\quad 5\cdot 7 = 35.$$

Затем — те, которые содержат в себе три простых делителя:

$$2\cdot 2\cdot 5 = 20,\quad 2\cdot 2\cdot 7 = 28,\quad 2\cdot 5\cdot 7 = 70.$$

Наконец, не забудем единицу и само разлагаемое число:

$$1,\ 140.$$

Все найденные нами делители образуют множество делителей числа 140, которое записывается с помощью фигурных скобок:

$$\text{Множество делителей числа } 140 = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 10,\ 14,\ 20,\ 28,\ 35,\ 70,\ 140\}.$$

Для удобства восприятия мы выписали здесь делители (*элементы множества*) в порядке возрастания, но, вообще говоря, это делать необязательно. Кроме того, введем сокращение записи. Вместо «Множество делителей числа 140» будем писать «Д(140)» (читается «Дэ от 140»). Таким образом,

$$\text{Д}(140) = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 10,\ 14,\ 20,\ 28,\ 35,\ 70,\ 140\}.$$

Точно так же можно найти множество делителей для любого другого натурального числа. Например, из разложения

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

мы получаем:

$$\text{Д}(105) = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 15,\ 21,\ 35,\ 105\}.$$

От множества всех делителей следует отличать множество простых делителей, которые для чисел 140 и 105 равны соответственно:

$$\text{ПД}(140) = \{2,\ 5,\ 7\},$$
$$\text{ПД}(105) = \{3,\ 5,\ 7\}.$$

Следует особо подчеркнуть, что в разложении числа 140 на простые множители двойка присутствует два раза, в то время как во множестве ПД(140) — только один. Множество ПД(140) — это, по своей сути, все ответы на задачу: «Найти простой множитель числа 140». Ясно, что один и тот же ответ не следует повторять больше одного раза.

Сокращение дробей. Наибольший общий делитель

Рассмотрим дробь

$$\frac{105}{140}\,.$$

Мы знаем, что эту дробь можно сократить на такое число, которое одновременно является и делителем числителя (105) и делителем знаменателя (140). Взглянем на множества Д(105) и Д(140) и выпишем их общие элементы.

$$\text{Д}(105) = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 15,\ 21,\ 35,\ 105\},$$
$$\text{Д}(140) = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 10,\ 14,\ 20,\ 28,\ 35,\ 70,\ 140\}.$$

Общие элементы множеств Д(105) и Д$(140) = \{1,\ 5,\ 7,\ 35\}$.

Последнее равенство можно записать короче, а именно:

$$\text{Д}(105) \cap \text{Д}(140) = \{1,\ 5,\ 7,\ 35\}.$$

Здесь специальный значок «$\cap$» («мешок отверстием вниз») как раз и указывает на то, что из двух множеств, записанных по разные стороны от него, надо выбрать только общие элементы. Запись «Д$(105) \cap (140)$» читается «пересечение множеств Дэ от 105 и Дэ от 140».

Замечание. Отметим по ходу дела, что с множествами можно производить разные бинарные операции, почти как с числами. Другой распространенной бинарной операцией является объединение, которое обозначается значком «$\cup$» («мешок отверстием вверх»). В объединение двух множеств входят все элементы как того, так и другого множества:

$$\text{ПД}(105) = \{3,\ 5,\ 7\};$$
$$\text{ПД}(140) = \{2,\ 5,\ 7\};$$
$$\text{ПД}(105) \cup \text{ПД}(140) = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}.$$

Итак, мы выяснили, что дробь

$$\frac{105}{140}$$

можно сократить на любое из чисел, принадлежащих множеству

$$Д(105) \cap Д(140) = \{1,\ 5,\ 7,\ 35\}$$

и нельзя сократить ни на какое другое натуральное число. Вот все возможные способы сокращения (за исключением неинтересного сокращения на единицу):

$$\frac{105}{140} = \frac{105/5}{140/5} = \frac{21}{28},$$
$$\frac{105}{140} = \frac{105/7}{140/7} = \frac{15}{20},$$
$$\frac{105}{140} = \frac{105/35}{140/35} = \frac{3}{4}.$$

Очевидно, что практичнее всего сокращать дробь на число, по возможности большее. В данном случае это число 35, про которое говорят, что оно является *наибольшим общим делителем* (НОД) чисел 105 и 140. Это записывается как

$$\text{НОД}(105,\ 140) = 35.$$

Впрочем, на практике, если нам даны два числа и требуется найти их наибольший общий делитель, мы вовсе не должны строить какие-либо множества. Достаточно просто разложить оба числа на простые множители и подчеркнуть те из этих множителей, которые являются общими для обоих разложений, например:

$$105 = 3 \cdot \underline{5} \cdot \underline{7},$$
$$140 = 2 \cdot 2 \cdot \underline{5} \cdot \underline{7}.$$

Перемножая подчеркнутые числа (в любом из разложений), получаем:

$$\text{НОД}(105,\ 140) = 5 \cdot 7 = 35.$$

Разумеется, возможен случай, когда подчеркнутых множителей окажется больше двух:

$$168 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot 7,$$
$$396 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 11.$$

Отсюда видно, что

$$\text{НОД}(168,\ 396) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

Особого упоминания заслуживает ситуация, когда общих множителей совсем нет и подчеркивать нечего, например:

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7,$$
$$55 = 5 \cdot 11.$$

В этом случае,

$$\text{НОД}(42,\ 55) = 1.$$

Два натуральных числа, для которых НОД равен единице, называются *взаимно простыми*. Если из таких чисел составить дробь, например,

$$\frac{42}{55},$$

то такая дробь является *несократимой*.

Вообще говоря, правило сокращения дробей можно записать в таком виде:

$$\frac{a}{b} = \frac{a/\text{НОД}(a,b)}{b/\text{НОД}(a,b)}.$$

Здесь предполагается, что a и b — натуральные числа, а вся дробь положительна. Если мы теперь припишем знак «минус» к обоим частям этого равенства, то получим соответствующее правило для отрицательных дробей.

Сложение и вычитание дробей. Наименьшее общее кратное

Пусть требуется вычислить сумму двух дробей:

$$\frac{1}{105} + \frac{1}{140}.$$

Мы уже знаем, как раскладываются на простые множители знаменатели:

$$\begin{aligned} 105 &= 3 \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 7\ }, \\ 140 &= 2 \cdot 2 \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 7\ }. \end{aligned}$$

Из этого разложения сразу следует, что, для того чтобы привести дроби к общему знаменателю, достаточно числитель и знаменатель первой дроби умножить на $2 \cdot 2$ (произведение неподчеркнутых простых множителей второго знаменателя), а числитель и знаменатель второй дроби — на 3 («произведение» неподчеркнутых простых множителей первого знаменателя). В результате знаменатели обеих дробей станут равны числу, которое можно представить так:

$$\overbrace{3 \cdot \underline{5} \cdot \underline{7}}^{105} \cdot 2 \cdot 2 = 105 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 140 = 420.$$

(где $\underbrace{\underline{5} \cdot \underline{7} \cdot 2 \cdot 2}_{140}$)

Нетрудно видеть, что оба исходных знаменателя (как 105, так и 140) являются делителями числа 420, а число 420, в свою очередь, кратно обоим знаменателям, — и не просто кратно, оно является *наименьшим общим кратным* (НОК) чисел 105 и 140. Это записывается так:

$$\text{НОК}(105, 140) = 420.$$

Итак, чтобы получить НОК чисел 105 и 140, мы разложили их на простые множители, подчеркнули те множители, которые являются общими для обоих чисел, а далее написали:

$$\text{НОК} = \text{все множители первого числа} \times \text{неподчеркнутые множители второго числа}.$$

Отсюда следует, что

$$\text{НОК}(105, 140) = 105 \cdot 140/\text{НОД}(105, 140).$$

Это можно также переписать в несколько более изящной, «симметричной» форме:

$$105 \cdot 140 = \text{НОК}(105, 140) \cdot \text{НОД}(105, 140).$$

Точно так же, для произвольных натуральных чисел b и d:

$$b \cdot d = \text{НОК}(b, d) \cdot \text{НОД}(b, d).$$

Теперь давайте доведем до конца суммирование наших дробей:

$$\frac{1}{105}+\frac{1}{140}=$$
$$=\frac{1}{3\cdot\underline{5}\cdot\underline{7}}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot\underline{5}\cdot\underline{7}}=$$
$$=\frac{2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 3\cdot\underline{5}\cdot\underline{7}}+\frac{3}{3\cdot 2\cdot 2\cdot\underline{5}\cdot\underline{7}}=$$
$$=\frac{4+3}{2\cdot 2\cdot 3\cdot\underline{5}\cdot\underline{7}}=\frac{7}{2\cdot 2\cdot 3\cdot\underline{5}\cdot\underline{7}}=\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3\cdot\underline{5}}=\frac{1}{60}.$$

Подобным же образом можно посчитать разность:

$$\frac{1}{105}-\frac{1}{140}=\frac{4}{4\cdot 105}-\frac{3}{3\cdot 140}=\frac{4}{420}-\frac{3}{420}=\frac{1}{420}.$$

Для того чтобы получить общий знаменатель двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, мы фактически проделываем ту же самую процедуру, что и при вычислении НОК(b, d). Именно НОК(b, d) и оказывается общим знаменателем. (Предполагается, что a, b, c и d — натуральные числа.)

Конспект

1. *Правило сокращения дробей.* Пусть a и b — натуральные числа ($b \neq 0$). Тогда

$$\frac{a}{b}=\frac{a/\text{НОД}(a,b)}{b/\text{НОД}(a,b)},$$

где НОД(a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b. Чтобы найти НОД, надо разложить числа a и b на простые множители и подчеркнуть те множители, которые являются общими для обоих чисел. НОД равен произведению подчеркнутых множителей, взятых в любом из разложений.

2. *Приведение дробей к общему знаменателю.* Пусть a, b, c и d — натуральные числа ($b \neq 0$, $d \neq 0$). В качестве общего знаменателя двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ удобно брать НОК(b, d) — наименьшее общее кратное знаменателей b и d. Чтобы получить НОК(b, d), мы раскладываем числа b и d на простые множители, причем общие множители подчеркиваем. Тогда

НОК = все множители числа b $\times$ неподчеркнутые множители числа d.

3. НОК и НОД связаны соотношением

$$b\cdot d=\text{НОК}(b,d)\cdot\text{НОД}(b,d).$$

3.10. Возведение в степень

Рассмотрим разложение на простые множители числа 32:

$$32=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2.$$

Как видно, в этом разложении пять двоек. Это можно записать короче, а именно:

$$32=2^5.$$

Выражение 2^5 читается «два в степени пять» или «два в пятой степени». Вообще, любое рациональное число а можно *возвести* в любую натуральную *степень* n. Запись a^n имеет тот же смысл, что и произведение n сомножителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ сомножителей}}.$$

При этом число a называется *основанием степени*, а число n — *показателем степени*. Рассмотрим в качестве примера такие равенства:

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a,$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a,$$
$$a^2 = a \cdot a.$$

Здесь каждая последующая строка получается из предыдущей делением правой части на a и уменьшение показателя степени в левой части на единицу. Ничто не мешает нам продолжить выписывать равенства дальше, придерживаясь той же закономерности:

$$a^1 = a,$$
$$a^0 = 1,$$
$$a^{-1} = \frac{1}{a},$$
$$a^{-2} = \frac{1}{a \cdot a}$$

и так далее.

Таким образом, мы определили операцию возведения в степень a^n не только для натурального, но и для любого целого показателя n (надо только оговориться, что основание a не должно быть равно нулю).

Следует отметить, что в сложных выражениях возведение в степень имеет приоритет над умножением и делением (и, тем более, над сложением и вычитанием):

$$a \cdot b^n = a \cdot (b^n),$$
$$a / b^n = a / (b^n).$$

Новая операция обладает следующими очевидными свойствами:

$$\boxed{\begin{aligned} &(1) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \\ &(2) \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \\ &(3) \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}, \\ &(4) \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n. \end{aligned}}$$

Здесь a и b — рациональные числа, не равные нулю, а n и m — произвольные целые числа. Проиллюстрируем эти свойства на примере, в котором $n = -3$, а $m = 2$.

$$(1) \quad a^{-n} = \frac{a^3}{1} = \frac{a^3/a^3}{1/a^3} = \frac{1}{1/a^3} = \frac{1}{a^n}.$$

$$(2) \quad a^n \cdot a^m = a^{-3} \cdot a^2 = \frac{1}{a \cdot a \cdot a} \cdot a \cdot a = \frac{1}{a} = a^{-1} = a^{n+m}.$$

$$(3) \quad (a^n)^m = (a^{-3})^2 = \frac{1}{a \cdot a \cdot} \cdot \frac{1}{a \cdot a \cdot} = \frac{1}{a^6} = a^{-6} = a^{n \cdot m}.$$

$$(4) \quad (a \cdot b)^n = (a \cdot b)^{-3} = \frac{1}{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3} = a^n \cdot b^n.$$

Примечательно, что число, обратное к числу a, можно представить в виде a^{-1}. Это дает дополнительную возможность записывать дроби в одну строчку:

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} = ab^{-1} = b^{-1}a.$$

Иногда возведение в степень записывают, используя в качестве бинарного оператора символ «^», называемый «крышечкой», или «домиком», или, совсем по-научному, «циркумфлексом»:

$$a^n = a\hat{}n.$$

Следует иметь в виду, что этот оператор не обладает ни свойствой коммутативности (переместительности), ни свойством ассоциативности (сочетательности), так что в общем случае

$$k\hat{}m \neq m\hat{}k;$$

$$(k\hat{}m)\hat{}n \neq k\hat{}(m\hat{}n).$$

Возведение в степень — это, вообще говоря, трудоемкая операция, для которой не существует специальной процедуры, облегчающий расчеты на бумаге — никаких вычислений «столбиком» или «уголком». Если нам вдруг понадобится возвести семерку в пятую степень, то нам придется просто «в лоб» выполнять все операции умножения. К счастью, на практике с подобной задачей приходится сталкиваться очень редко. В ближайшее время мы будем возводить в степень одно-единственное число, для которого эта процедура принимает исключительно простой вид. Речь идет о числе 10. Действительно, для того чтобы возвести 10 в степень 5, надо просто к единице приписать пять нулей:

$$10^5 = 100000.$$

Возведение в отрицательную степень тоже никакой трудности не представляет:

$$10^{-5} = \frac{1}{100000}.$$

Конспект

1. Возведение рационального числа a, не равного нулю, в натуральную степень n определяется как

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ сомножителей}},$$

при этом a называется *основанием*, а n — *показателем* степени. Возведение в степень определено также для нулевого и отрицательного показателя: $a^0 = 1$; $a^{-n} = 1/a^n$ (здесь n, как и ранее, — натурально число).

2. Возведение в степень имеет приоритет над умножением и делением: $a \cdot b^n = a \cdot (b^n)$; $a/b^n = a/(b^n)$. В частности, дробь a/b может быть записана как ab^{-1}.

3. Возведение в степень обладает следующими свойствами:

$$a^{-n} = 1/a^n,$$
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m},$$
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n,$$

где a и b — рациональные числа, не равные нулю, а n и m — произвольные целые числа.

4. Чтобы возвести 10 в натуральную степень n, надо к единице приписать n нулей, например: $10^5 = 100000$. Соответственно, $10^{-5} = 1/100000$.

3.11. Десятичные дроби и арифметические операции с ними

Проводить расчеты с дробями, прямо скажем, довольно утомительно, особенно когда требуется складывать и вычитать дроби с разными знаменателями. Но если уж без дробей совсем нельзя обойтись, то, может быть, можно как-нибудь договориться о том, чтобы хотя бы знаменатели у них всегда были одинаковыми? Заманчивая идея, не правда ли? Конечно, универсального знаменателя на все случаи жизни подобрать не удастся, но некий порядок в знаменателях мы всё же можем навести. Давайте будем использовать в качестве знаменателей только числа вида 10^n, где n — натуральное число, то есть числа, которые записываются в виде единицы с последующими нулями, такие как 10, 100, 1000. Тогда дроби, с которыми мы будем иметь дело, будут выглядеть так:

$$\frac{12}{10},\ \frac{3}{100},\ \frac{45678}{1000},\ \frac{10009}{10000}\ \text{и тому подобное.}$$

Эту громоздкую, «двухэтажную» запись можно сделать более компактной, переписав знаменатели в виде десятки в отрицательной степени:

$$\begin{aligned}\frac{12}{10} &= 12 \cdot 10^{-1},\\ \frac{3}{100} &= 3 \cdot 10^{-2},\\ \frac{45678}{1000} &= 45678 \cdot 10^{-3},\\ \frac{10009}{10000} &= 10009 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

Хорошо получилось? Не очень. Такие числа очень неудобно сравнивать между собой. Что больше $12 \cdot 10^{-1}$ или $10009 \cdot 10^{-4}$? С первого взгляда это не видно. Поэтому, чтобы облегчить сравнение чисел, представим их в виде суммы целой и дробной частей:

$$\begin{aligned}12 \cdot 10^{-1} &= \ \ 1 + 2 \cdot 10^{-1}\\ 3 \cdot 10^{-2} &= \ \ 0 + 03 \cdot 10^{-2}\\ 45678 \cdot 10^{-3} &= 45 + 678 \cdot 10^{-3}\\ 10009 \cdot 10^{-4} &= \ \ 1 + 0009 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

Обратите внимание: здесь после знака «+» стоит всегда ровно столько цифр, каков показатель степени числа 10, взятый с противоположным знаком. Для того чтобы соблюсти эту закономерность, мы в некоторых случаях к дробной части приписали слева нули, которые по сути ничего не меняют, но сильно облегчают сравнение чисел между собой. Если бы мы записали числа так:

$$\begin{aligned}&1 + 2 \cdot 10^{-1},\\ &1 + 9 \cdot 10^{-4},\end{aligned}$$

то можно было бы по невнимательности вначале ошибочно подумать, что второе число больше первого, но поскольку мы приписали «лишние» нули, такая ошибка исключена:

$$\begin{aligned}&1 + 2 \cdot 10^{-1},\\ &1 + 0009 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Однако после того как мы написали такие «лишние» нули, наша запись стала перегружена повторяющейся информацией. В самом деле, если показатель степени у десятки окажется неразборчивым, то мы всегда сможем его восстановить, просто пересчитав число цифр после знака «+». Возникает искушение просто отбросить десятку вместе с показателем степени, поскольку она не добавляет ничего нового. Но тогда мы придем к неверному равенству, такому как: $1 + 2 \cdot 10^{-1} = 1 + 2$. Впрочем, этой неприятности легко избежать, если одновременно с отбрасыванием десятки поменять знак «+» на какой-нибудь другой значок, не означающий никакого арифметического действия. В качестве такого значка, называемого *десятичным разделителем*, принято брать запятую:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cdot 10^{-1} &= 1{,}2; \\ 0 + 03 \cdot 10^{-2} &= 0{,}03; \\ 45 + 678 \cdot 10^{-3} &= 45{,}678; \\ 1 + 0009 \cdot 10^{-4} &= 1{,}0009. \end{aligned}$$

Замечание. Надо признаться, что запятая для этой роли подходит плохо. Как мы теперь будем отличать число $1{,}2$ от перечисления двух чисел, единицы и двойки: $1, 2$? Единственное отличие заключается в том, что в перечислении $1, 2$ после запятой стоит пробел, а в числе $1{,}2$ такого пробела нет. Но это, прямо скажем, не такое отличие, которое сразу бросается в глаза. Но такова традиция, получившая распространение в европейских странах, и нам придется ей следовать. Во избежание путаницы мы теперь будем использовать при перечислениях не запятую, а точку с запятой: $1; 2$. В англоязычной литературе и в языках программирования в качестве десятичного разделителя используют точку, что следует признать более удачным выбором.

Новый вид дробей, в написании которых используется запятая, называются *десятичными* — для того чтобы отличать их от дробей, с которыми мы имели дело ранее, называемых *обыкновенными*. Читаются десятичные дроби так же, как и смешанные числа:

$1{,}2$ — одна целая две десятых;
$0{,}123$ — ноль целых сто двадцать три тысячных.

Такова, во всяком случае, высокая литературная норма, но на практике часто говорят просто:

$1{,}2$ — один и два;
$0{,}123$ — ноль и один два три.

Заметим, что формально любое целое число можно представить в виде десятичной дроби, приписав к нему справа запятую и ноль, или даже несколько нулей, например:

$15 = 15{,}0$ — пятнадцать целых ноль десятых;
$15 = 15{,}000$ — пятнадцать целых ноль тысячных.

Поэтому, говоря о десятичных дробях, мы не будем исключать, что на самом деле они могут оказаться целыми числами.

Десятичные дроби вполне могут быть отрицательными:

$$-123{,}45 = -123 - 45 \cdot 10^{-2} = -\frac{12345}{100}.$$

Если в каком-либо числе a, записанном в виде десятичной дроби, стереть запятую и все цифры после запятой, то мы получим целую часть числа a. Если же, напротив, все цифры перед запятой заменить на ноль, то мы получим дробную часть числа . Так, у числа

$$-123{,}45$$

целая часть равна

$$-123{,}0$$

а дробная часть —

$$-0{,}45.$$

Очевидно, что у всех целых чисел дробная часть равна нулю.

Десятичную дробь можно разбить на разряды, подобно тому как мы это делали с целыми числами:

$$\underline{1}\underline{2}\underline{3},\underline{4}\underline{5}\underline{6} = \underline{1} \cdot 100 + \underline{2} \cdot 10 + \underline{3} \cdot 1 + \underline{4} \cdot 0{,}1 + \underline{5} \cdot 0{,}01 + \underline{6} \cdot 0{,}001;$$

или

$$\underline{1}\underline{2}\underline{3},\underline{4}\underline{5}\underline{6} = \underline{1} \cdot 10^2 + \underline{2} \cdot 10^1 + \underline{3} \cdot 10^0 + \underline{4} \cdot 10^{-1} + \underline{5} \cdot 10^{-2} + \underline{6} \cdot 10^{-3};$$

Здесь за знакомым нам разрядом единиц ($1 = 10^0$) следует разряд десятых ($0{,}1 = 10^{-1}$), затем разряд сотых ($0{,}01 = 10^{-2}$) и так далее.

Сложение и вычитание десятичных дробей делается очень просто, так как они легко приводятся к одному знаменателю. Например,

$$0{,}432 + 0{,}1 =$$
$$0{,}432 + 0{,}100 =$$
$$0{,}532.$$

Или же:

$$0{,}432 - 0{,}1 =$$
$$0{,}432 - 0{,}100 =$$
$$0{,}332.$$

Впрочем, вторые строчки в обеих этих цепочках равенств — совершенно лишние. Приписывать «недостающие» нули можно и мысленно. При сложении и вычитании столбиком запятые у чисел должны находиться одна под другой:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 3\ 2,\ 1 \\ 0,\ 2\ 4\ 6 \end{array} \\ \hline 3\ 2,\ 3\ 4\ 6 \end{array}$$

Умножение десятичных дробей на 10^n

Мы уже знаем, что всякую десятичную дробь с дробной частью, не равной нулю, можно представить как

$$a \cdot 10^k,$$

где a и k — целые числа, причем $k < 0$. Вообразим себе, что целое число a записано в виде десятичной дроби, то есть припишем к нему мысленно справа запятую и ноль, например:

$$1234{,}0.$$

Когда мы умножаем это число на 10^k, где $k < 0$, мы просто переносим запятую на $|k|$ цифр влево (напомню, что под $|k|$ мы понимаем модуль k, то есть число k с отброшенным знаком). Например,

$$1234{,}0 \cdot 10^{-3} = 1{,}\underline{234}.$$

Если $|k|$ окажется слишком велико, нам придется дописать «лишние» нули:

$$1234{,}0 \cdot 10^{-5} = 0{,}\underline{01234}.$$

Вернемся теперь к записи

$$a \cdot 10^k,$$

и посмотрим, что будет, если число k окажется положительным или равным нулю. Этот случай нам, собственно, хорошо знаком. Для того чтобы умножить a на 10^k, надо просто приписать к числу a справа k нулей. Но теперь мы сформулируем это правило несколько по-другому. Мы скажем: чтобы умножить a на 10^k, где $k \geqslant 0$, надо перенести запятую в числе a на k цифр вправо, например:

$$1234{,}0 \cdot 10^3 = 1234\underline{000}{,}0.$$

Само собой разумеется, что, когда нам не хватает знаков, мы просто приписываем лишние нули. Мы больше не будем всякий раз об этом напоминать.

Делая обобщение на случай, когда k является произвольным целым числом, можно утверждать, что умножение произвольного целого числа a на 10^k сводится к перемещению запятой на k цифр вправо. Если k отрицательно, то, в соответствии со смыслом отрицательных чисел, перемещение фактически происходит в противоположную сторону, то есть влево.

А что должно получиться, если мы умножим целое число а вначале на 10^k, а потом — еще на 10^n, где n — еще одно произвольное целое число? Для того чтобы получить ответ, нам, очевидно, надо переместить запятую на $(k + n)$ цифр — в соответствии с тем фактом, что $10^k \cdot 10^n = 10^{k+n}$. Это перемещение можно разбить на два этапа: вначале переносим запятую на k цифр, а потом — на n. Именно такая ситуация реализуется, когда мы десятичную дробь $a \cdot 10^k$ умножаем на 10^n:

$$(a \cdot 10^k) \cdot 10^n.$$

Поскольку в десятичной дроби $a \cdot 10^k$ запятая уже перенесена на k цифр, осталось ее перенести на n цифр. В итоге мы пришли к таком правилу: для того чтобы умножить произвольную десятичную дробь на 10^n, надо в ее записи переместить запятую на n цифр вправо. Например,

$$3{,}21 \cdot 10^3 \quad = 3\underline{210}{,}0;$$
$$3{,}21 \cdot 10^{-2} = \qquad 0{,}\underline{03}21.$$

Произведение двух десятичных дробей

Пусть

$$x = a \cdot 10^k \ \text{ и } \ y = b \cdot 10^n,$$

где a, b, k и n — некоторые целые числа, причем a и b не оканчиваются на ноль. Тогда произведение $x \cdot y$, очевидно, равно

$$x \cdot y = (a \cdot b) \cdot 10^{k+n}.$$

Если оба показателя степени, k и n, больше нуля, то мы приходим к давно известному нам правилу умножения «круглых» чисел: мы отбрасываем поначалу все конечные нули, выполняем умножение без них, а потом к результату приписываем столько нулей, сколько мы раньше отбросили в обоих сомножителях вместе взятых. Например,

$$3\underline{00} \cdot 5\underline{0} = 15\underline{000};$$

Это же правило формально действует и в том случае, когда один из показателей степени положителен, а другой равен нулю:

$$3\underline{00} \cdot 5 = 15\underline{00};$$

Если оба показателя степени, k и n, меньше нуля, то числа x и y являются дробными. Для них правило умножения таково: мы отбрасываем в их записи запятые, выполняем умножение как с целыми числами, а потом в ответе отделяем запятой столько знаков, сколько их было отделено в обоих сомножителях вместе взятых. Например,

$$0{,}\underline{03} \cdot 0{,}\underline{5} = 0{,}\underline{015};$$

Это же правило формально действует и в том случае, когда один из показателей степени отрицателен, а другой равен нулю:

$$0,\underline{03} \cdot 5 = 0{,}\underline{15};$$

Если же один из показателей степени положителен, а другой отрицателен, тогда мы имеем дело с умножением «круглого» числа на дробное. В «круглом» числе мы отбрасываем нули, в дробном отбрасываем запятую, и, выполнив умножение, ставим запятую на таком же удалении от конца, на котором она стояла в дробном сомножителе, а потом сдвигаем ее вправо на столько цифр, сколько мы отбросили нулей в «круглом» сомножителе. Например,

$$3\underline{00} \cdot 0{,}\underline{5} = 15\underline{0};$$
$$3\underline{0} \cdot 0{,}\underline{05} = 1{,}\underline{5};$$

Замечание о делении десятичных дробей

Сохраняя те же обозначения, что и раньше, мы можем, очевидно, записать частное двух чисел

$$x = a \cdot 10^k \text{ и } y = b \cdot 10^n,$$

в таком виде:

$$x/y = (a/b) \cdot 10^{k-n}.$$

Если a делится нацело на b, то в результате получается десятичная дробь (возможно, с нулевой дробной частью), и никаких больше проблем не возникает. Но что делать, если это не так? Об этом речь пойдет в двух следующих главах.

Конспект

1. *Десятичная дробь* — это дробь:

(1) которая представима в виде $a \cdot 10^{-n}$, где a и n — целые числа, причем $n \geqslant 0$. Например, $1234/100 = 1234 \cdot 10^{-2}$;

(2) в записи которой сомножитель 10^{-n} отброшен, зато последние n цифр числа a отделены от остальных *десятичным разделителем* (запятой). Например, $1234 \cdot 10^{-2} = 12{,}34$. При этом может понадобиться приписать к числу a слева дополнительные нули: $123 \cdot 10^{-4} = 0{,}0123$. Если $n = 0$, то к числу a просто приписывается «,0»: $123 = 123 \cdot 10^0 = 123{,}0$.

В отличие от десятичных, те дроби, с которыми мы имели дело раньше, называют *обыкновенными*.

2. Целая часть десятичной дроби получается отбрасыванием запятой и последующих цифр. Дробная часть получается заменой всех цифр, стоящих перед запятой, на ноль.

3. Десятичная дробь может быть разбита на разряды, например:

$$123{,}456 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3};$$

За разрядом единиц следует разряд десятых, затем разряд сотых, затем разряд тысячных и так далее.

4. Сложение и вычитание десятичных дробей осуществляется по разрядам, то есть складываются или вычитаются одинаковые разряды, как это было в случае целых чисел.

5. Чтобы умножить произвольную десятичную дробь на 10^n, где n — целое число, надо в ее записи переместить запятую на n цифр вправо (если n отрицательно, то фактически перемещение происходит в противоположную сторону). Например, $3{,}21 \cdot 10^3 = 3210{,}0$; $3{,}21 \cdot 10^{-2} = 0{,}0321$.

6. Пусть $x = a \cdot 10^k$ и $y = b \cdot 10^n$, где a, b, k и n — целые числа. Тогда $xy = ab \cdot 10^{k+n}$. Следствия:

(1) Правило умножения друг на друга десятичных дробей ($k \leqslant 0$, $n > 0$): мы отбрасываем в их записи запятые, выполняем умножение как с целыми числами, а потом в ответе отделяем запятой стояло столько знаков, сколько их было отделено в обоих сомножителях вместе взятых. Например: $0{,}03 \cdot 0{,}5 = 0{,}015$.

(2) Правило умножение дробного числа на «круглое» ($k \leqslant 0$, $n \leqslant 0$). В дробном числе отбрасываем запятую, в «круглом» отбрасываем нули и, выполнив умножение, ставим запятую на таком же удалении от конца, на котором она стояла в дробном сомножителе, а потом сдвигаем ее вправо на столько цифр, сколько мы отбросили нулей в «круглом» сомножителе. Например, $300 \cdot 0{,}5 = 150$.

7. В тех же обозначениях $x/y = (a/b) \cdot 10^{k-n}$. В случае когда a делится нацело на b результатом деления x/y является десятичная дробь (возможно, с нулевой дробной частью).

3.12. Перевод обыкновенной дроби в десятичную и обратно

Преобразование обыкновенной дроби в десятичную

Допустим, мы хотим преобразовать обыкновенную дробь $11/4$ в десятичную. Проще всего сделать это так:

$$\frac{11}{4} = 2\,\frac{3}{4} = 2\,\frac{3}{2 \cdot 2} = 2\,\frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = 2\,\frac{75}{100} = 2{,}75.$$

Это удалось нам потому, что в данном случае разложение знаменателя на простые множители состоит только из двоек. Мы умножили числитель и знаменатель дополнительно на две пятерки, воспользовались тем, что $10 = 2 \cdot 5$, и получили десятичную дробь. Подобная процедура возможна, очевидно, только в том случае, когда разложение знаменателя на простые множители не содержит ничего, кроме двоек и пятерок. Если в разложении знаменателя присутствует любое другое простое число, на которое эту дробь нельзя сократить, то такую дробь преобразовать к десятичной не получится. Тем не менее мы попробуем это сделать, но только другим способом, с которым мы сначала познакомимся на примере всё той же дроби $11/4$. Давайте поделим 11 на 4 «уголком»:

1	1	4
	8	2
	3	

В строке ответа мы получили целую часть (2), и еще у нас есть остаток (3). Раньше мы деление на этом заканчивали, но теперь мы знаем, что к делимому (11) можно приписать справа запятую и несколько нулей, что мы теперь мысленно и сделаем. Следом после запятой идет разряд десятых. Ноль, который стоит у делимого в этом разряде, припишем к полученному остатку (3):

$$\begin{array}{cc|cc}
1 & 1 & 4 & \\ \cline{3-4}
 & 8 & 2 & \\ \cline{1-2}
 & 3 & 0 &
\end{array}$$

Теперь деление можно продолжать как ни в чем не бывало. Надо только не забыть поставить в строке ответа запятую после целой части:

$$\begin{array}{cc|cc}
1 & 1 & 4 & \\ \cline{3-4}
 & 8 & 2, & 7 \\ \cline{1-2}
 & 3 & 0 & \\
 & 2 & 8 & \\ \cline{2-3}
 & & 2 &
\end{array}$$

Теперь приписываем к остатку (2) ноль, который стоит у делимого в разряде сотых и доводим деление до конца:

$$\begin{array}{cc|ccc}
1 & 1 & 4 & & \\ \cline{3-5}
 & 8 & 2, & 7 & 5 \\ \cline{1-2}
 & 3 & 0 & & \\
 & 2 & 8 & & \\
 & & 2 & 0 & \\
 & & 2 & 0 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

В результате получаем, как и раньше,

$$11/4 = 2,75.$$

Попробуем теперь точно таким же способом вычислить, чему равна дробь $27/11$:

$$\begin{array}{cc|ccc}
2 & 7 & 1 & 1 & \\ \cline{3-5}
2 & 2 & 2, & 4 & 5 \\ \cline{1-2}
 & 5 & 0 & & \\
 & 4 & 4 & & \\ \cline{2-3}
 & & 6 & 0 & \\
 & & 5 & 5 & \\ \cline{3-4}
 & & & 5 &
\end{array}$$

Мы получили в строке ответа число 2,45, а в строке остатка — число 5 . Но такой остаток нам уже раньше встречался. Поэтому мы уже сразу можем сказать, что, если мы продолжим наше деление «уголком», то следующей цифрой в строке ответа будет 4, затем пойдет цифра 5, потом — снова 4 и снова 5, и так далее, до бесконечности:

$$27/11 = 2{,}454545454545...$$

Мы получили так называемую *периодическую* десятичную дробь с *периодом* 45. Для таких дробей применяется более компактная запись, в которой период выписывается только один раз, но при этом он заключается в круглые скобки:

$$2,454545454545... = 2{,}(45).$$

Вообще говоря, если делить «уголком» одно натуральное число на другое, записывая ответ в виде десятичной дроби, то возможно только два исхода: (1) либо рано или поздно в строке остатка мы получим ноль, (2) либо там окажется такой остаток, который уже нам раньше встречался (набор возможных остатков ограничен, поскольку все они заведомо меньше делителя). В первом случае результатом деления является конечная десятичная дробь, во втором случае — периодическая.

Преобразование периодической десятичной дроби в обыкновенную

Пусть нам дана положительная периодическая десятичная дробь с нулевой целой частью, например:

$$a = 0{,}2(45).$$

Как преобразовать эту дробь обратно в обыкновенную?

Умножим ее на число 10^k, где k — это число цифр, стоящих между запятой и открывающей круглой скобкой, обозначающей начало периода. В данном случае $k = 1$ и $10^k = 10$:

$$a \cdot 10^k = 2{,}(45).$$

Полученный результат умножим на 10^n, где n — длина периода, то есть число цифр, заключенных между круглыми скобками. В данном случае $n = 2$ и $10^n = 100$:

$$a \cdot 10^k \cdot 10^n = 245{,}(45).$$

Теперь вычислим разность

$$a \cdot 10^k \cdot 10^n - a \cdot 10^k = 245{,}(45) - 2{,}(45).$$

Поскольку дробные части у уменьшаемого и вычитаемого одинаковы, то у разности дробная часть равна нулю, и мы приходим к простому уравнению относительно a:

$$a \cdot 10^k \cdot (10^n - 1) = 245 - 2.$$

После того как мы подставим сюда значения 10^k и 10^n, это уравнение решается так:

$$a \cdot 10 \cdot (100 - 1) = 245 - 2;$$

$$a \cdot 10 \cdot 99 = 245 - 2;$$

$$a = \frac{245 - 2}{10 \cdot 99}.$$

Мы специально пока не доводим вычисления до конца, чтобы было наглядно видно, как можно сразу выписать этот результат, опуская промежуточные рассуждения. Уменьшаемое в числителе (245) — это дробная часть числа

$$a = 0{,}2(45),$$

если в ее записи стереть скобки. Вычитаемое в числителе (2) — это непериодическая часть числа a, располагающаяся между запятой и открывающей скобкой. Первый сомножитель в знаменателе (10) — это единица, к которой приписано столько нулей, сколько цифр в непериодической части (k). Второй сомножитель в знаменателе (99) — это столько девяток, сколько цифр содержит период (n).

Теперь наши вычисления можно довести до конца:

$$a = \frac{243}{10 \cdot 99} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 27}{2 \cdot 5 \ \cdot \ 3 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{27}{110}.$$

Если непериодическая часть отсутствует, то ситуация заметно упрощается. Пусть, например,

$$b = 0{,}(45).$$

Воспользовавшись плодами наших рассуждений, мы получаем

$$b = \frac{45}{99}.$$

Здесь в числителе стоит период, а в знаменателе — столько девяток, сколько цифр в периоде. После сокращения на 9 полученная дробь оказывается равной

$$b = \frac{5}{11}.$$

Любопытный результат получается, если перевести в обыкновенную дробь число

$$0{,}(9) = 0{,}9999999...$$

Действительно, согласно только что установленным правилам,

$$0{,}(9) = \frac{9}{9} = 1.$$

Подобным же образом

$$0{,}5999999... = 0{,}6.$$

Конспект

1. Несократимая обыкновенная дробь может быть преобразована в конечную десятичную только в том случае, если разложение ее знаменателя на простые сомножители не содержит ничего, кроме двоек и пятерок. Для этого числитель и знаменатель надо умножить на такое число, которое обеспечит равное количество двоек и пятерок в разложении знаменателя, например:

$$\frac{11}{4} = 2\,\frac{3}{4} = 2\,\frac{3}{2 \cdot 2} = 2\,\frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = 2\,\frac{75}{100} = 2{,}75.$$

2. Всякую обыкновенную дробь можно преобразовать в десятичную с помощью деления «уголком», если не останавливать процедуру деления на разряде единиц, а продолжать ее для последующих разрядов — десятых, сотых и так далее. При этом возможно два исхода: (1) либо рано или поздно в строке остатка мы получим ноль, (2) либо там окажется такой остаток, который уже раньше встречался. В первом случае результатом деления является конечная десятичная дробь, во втором случае — периодическая, например:

$$(1)\ \frac{11}{4} = 2{,}75; \quad (2)\ \frac{27}{11} = 2,454545454545... = 2{,}(45).$$

3. Преобразование периодической десятичной дроби с нулевой целой частью в обыкновенную осуществляется по образцу:

$$0{,}2(45) = \frac{245 - 2}{10 \cdot 99},$$

где 245 — это дробная часть числа $0{,}2(45)$ с удаленными скобками; 2 — непериодическая часть; 10 — единица, к которой приписано столько нулей, сколько цифр в непериодической части; 99 — столько девяток, сколько цифр содержит период. Если непериодическая часть отсутствует, то преобразование упрощается:

$$0{,}(45) = \frac{45}{99}.$$

Здесь в числителе стоит период, а в знаменателе — столько девяток, сколько цифр в периоде. В частности, $0{,}9999999... = 0{,}(9) = 9/9 = 1$.

3.13. Приближенные вычисления с десятичными дробями

Иметь дело с периодическими десятичными дробями очень неудобно. Зато их легко можно округлить с точностью до любого разряда. Округление производится фактически по тем же правилам, по которым мы раньше округляли целые числа, при этом на запятую можно как бы не обращать внимание. Вот примеры округления до разряда сотых (или, как еще говорят, до двух знаков после запятой):

$$\begin{aligned} 1/3 &= \ \ 0{,}333333... \approx \ \ 0{,}33; \\ 20/3 &= \ \ 6{,}666666... \approx \ \ 6{,}67; \\ 270/11 &= 24{,}545454... \approx 24{,}55. \end{aligned}$$

Здесь все разряды, следующие после разряда сотых, оказались зануленными, и мы их просто отбросили.

Разумеется, округлять можно и непериодические дроби, если у них после запятой стоит слишком много «избыточных» знаков:

$$1{,}23456789 \approx 1{,}23.$$

Если в результате округления на месте последнего сохраняемого разряда оказывается ноль, то этот ноль принято выписывать явным образом:

$$1{,}201 \approx 1{,}20;$$
$$1{,}199 \approx 1{,}20.$$

Здесь в обоих примерах концевой ноль указывает на то, что округление производилось именно с точностью до двух знаков после запятой, а не до одного. Таким образом, если

$$a \approx 1{,}20,$$

то, согласно правилам округления, это значит, что

$$1{,}195 \leqslant a < 1{,}205.$$

А если бы мы написали, что

$$a \approx 1{,}2,$$

то это бы означало:

$$1{,}15 \leqslant a < 1{,}25.$$

Стандартное представление чисел

Давайте вспомним, как мы раньше округляли целые числа. Округление до двух значащих цифр могло выглядеть так:

$$123\,456 \approx 120\,000,$$

а округление до пяти значащих цифр — так:

$$120\,001 \approx 120\,000.$$

При этом по виду ответа никак нельзя было определить, сколько значащих цифр он содержит, иначе говоря, мы не могли ответить на вопрос, с какой точностью проведено округление. Теперь, познакомившись с десятичными дробями, мы можем сделать запись более информативной (а во многих случаях и более компактной):

$$123456 \approx 1{,}2 \cdot 10^5 \ \ \text{(две значащие цифры);}$$
$$120001 \approx 1{,}2000 \cdot 10^5 \ \ \text{(пять значащих цифр).}$$

Здесь результаты округления записаны в так называемом *стандартном представлении*. В общем случае стандартное представление числа x имеет такой вид:

$$x = a \cdot 10^n.$$

Здесь показатель степени n — это некоторое целое число, а первый сомножитель a представляет собой десятичную дробь, у которой все цифры являются значащими и абсолютная величина находится в пределах от 1 (включительно) до 10 (не включительно):

$$1 \leqslant |a| < 10.$$

Десятичная дробь a называется *мантиссой* числа x, а n — его *порядком*. Вот еще два примера записи чисел в стандартном представлении:

$$-1\,200\,000 = -1{,}2 \cdot 10^6 \ \text{(«минус один и два на десять в шестой»)}$$
$$0{,}00105 = 1{,}05 \cdot 10^{-3} \ \text{(«один-ноль-пять на десять в минус третьей»).}$$

Если порядок n равен нулю, то сомножитель 10^n можно опустить:

$$9{,}8700.$$

Заметим, что число ноль в стандартном представлении записать нельзя. Вместо этого пользуются обычной записью: 0 или $0{,}0$.

Приближенное умножение, сложение и вычитание десятичных дробей легко сводится к соответствующим приближенным операциям с целыми числами. Здесь действует то же правило, что и раньше. Перед умножением двух чисел мы округляем их до одинакового числа значащих цифр, и в точности до такого же числа значащих цифр округляем полученный ответ. Вот пример вычисления с точностью до двух значащих цифр:

$$687{,}9 \cdot 0{,}267 \approx 690 \cdot 0{,}27 = 69 \cdot 10^1 \cdot 27 \cdot 10^{-2} = 69 \cdot 27 \cdot 10^{1-2} =$$
$$= 1863 \cdot 10^{-1} \approx 1900 \cdot 10^{-1} = 1{,}9 \cdot 10^3 \cdot 10^{-1} = 1{,}9 \cdot 10^2;$$

Когда мы складываем или вычитаем, то округление проводится до одинакового разряда, причем особую осторожность надо проявлять при вычитание близких друг к другу чисел:

$$61{,}238 + 0{,}345678 \approx 61{,}2 + 0{,}3 = 61{,}5;$$
$$61{,}238 - 0{,}345678 \approx 61{,}2 - 0{,}3 = 60{,}9;$$

$$7{,}6543 - 7{,}6457 \approx 7{,}654 - 7{,}646 = 0{,}008.$$

А как быть, если в ходе умножения мы хотим получить ответ с точностью не до определенного числа значащих цифр, а до определенного разряда (например, для того чтобы использовать его в операции сложения)? Пусть, например, от нас требуется вычислить следующее арифметическое выражение с точностью до трех знаков после запятой:

$$0{,}1234 \cdot 0{,}5678 + 0{,}123456.$$

В этом случае мы вначале делаем грубую оценку результата умножения:

$$0{,}1234 \cdot 0{,}5678 \approx 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}06.$$

Округлив сомножители до одной значащей цифры, мы получили ответ с точностью до двух знаков после запятой, а нам нужно три знака. Одного знака недостает. Поэтому, если при округлении сомножителей мы сохраним на один знак больше, то как раз и получим требуемую точность:

$$0{,}1234 \cdot 0{,}5678 + 0{,}123456 \approx 0{,}12 \cdot 0{,}57 + 0{,}123 =$$
$$= 0{,}0684 + 0{,}123 \approx 0{,}068 + 0{,}123 = 0{,}191.$$

Замечание. Следует иметь в виду, что грубая оценка (как, впрочем, и всякое приближенное вычисление) не всегда обеспечивает правильный порядок результата. Пусть, например, мы хотим вычислить произведение $0{,}9444 \cdot 1{,}444$ с точностью до двух знаков после запятой. Делаем сначала грубую оценку:

$$0{,}9444 \cdot 1{,}444 \approx 0{,}9 \cdot 1 = 0{,}9.$$

До требуемой точности нам не хватает одной значащей цифры. Добавляем при округлении одну значащую цифру и получаем:

$$0{,}9444 \cdot 1{,}444 \approx 0{,}94 \cdot 1{,}4 = 1{,}316 \approx 1{,}3.$$

Опять не хватает одной значащей цифры! Придется перечитывать с еще большей точностью:

$$0{,}9444 \cdot 1{,}444 \approx 0{,}944 \cdot 1{,}44 = 1{,}35936 \approx 1{,}36.$$

И только теперь мы получили желаемые два знака после запятой.

Иногда бывает нужно вычислить сумму или разность с точностью не до определенного разряда, а до определенного числа значащих цифр. Хотя сформулировать формальное правило на этот счет было бы не так-то просто, практических трудностей такие вычисления обычно не вызывают. Вот пример арифметического выражения, содержащего произведение и разность, которое рассчитано с точностью до двух значащих цифр:

$$0{,}123 \cdot (456{,}78 - 449{,}876) \approx 0{,}12 \cdot (456{,}8 - 449{,}9) = 0{,}12 \cdot 6{,}9 = 0{,}828 \approx 0{,}83.$$

Приближенное деление

Допустим, мы хотим найти результат деления

$$\frac{12345}{6789}$$

с точностью до двух значащих цифр. Для этого мы могли бы с помощью деления «уголком» вычислить первые три цифры ответа:

$$\frac{12345}{6789} = 1{,}81...,$$

а потом по всем правилам округлить результат до требуемой точности:

$$\frac{12345}{6789} = 1{,}81... \approx 1{,}8.$$

Но мы так делать не будем. Гораздо удобнее, прежде чем приступать к трудоемкой операции деления, сперва округлить делимое и делитель. При этом в каждом из них нужно сохранить столько значащих цифр, сколько их должно быть в ответе. В данном случае, должно остаться по две значащие цифры:

$$12345 \approx 12000;$$
$$6789 \approx 6800.$$

Почему именно так? Давайте вспомним о приближенном умножении. Мы знаем, что если его выполнять по всем правилам, то число значащих цифр у обоих сомножителей и у их произведения оказывается одинаковым. Мы знаем также, что пример на умножение

$$a \cdot b = c$$

легко превращается в пример на деление с теми же числами:

$$c/a = b.$$

Поэтому правило «одинакового числа значащих цифр» остается справедливым и в случае деления.

Итак, мы имеем:

$$\frac{12345}{6789} \approx \frac{12000}{6800} = \frac{120}{68}.$$

Теперь выполняем деление «уголком»:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{6} & 8 & \\ \cline{4-6}
 & 6 & 8 & \multicolumn{1}{|c}{1,} & 7 & 6 \\ \cline{1-3}
 & 5 & 2 & 0 & & \\
 & 4 & 7 & 6 & & \\ \cline{2-4}
 & & 4 & 4 & 0 & \\
 & & 4 & 0 & 8 & \\ \cline{3-5}
 & & & 3 & 2 &
\end{array}$$

Отсюда:

$$\frac{12345}{6789} \approx \frac{120}{68} = 1{,}76\ldots \approx 1{,}8.$$

Мы получили в точности тот же ответ, что и раньше. Однако в общем случае ответы могут немного отличаться. Допустим, мы хотим получить частное от деления тех же чисел с точностью до одной значащей цифры. После округления точного результата деления ответ оказывается таким:

$$\frac{12345}{6789} = 1{,}8\ldots \approx 2.$$

Если же мы вначале округлим делимое и делитель и только потом выполним деление, то ответ будет другим:

$$\frac{12345}{6789} \approx \frac{10000}{7000} = \frac{10}{7} = 1{,}4\ldots \approx 1.$$

Но подобные расхождения, как мы знаем, для приближенных вычислений — в порядке вещей.

Вычислим теперь следующее частное с точностью до двух значащих цифр:

$$\frac{1234{,}5}{0{,}6789}.$$

Делается это так:

$$\begin{aligned}
&\frac{1234,5}{0,6789} \;\approx\; \text{округляем числитель и знаменатель}\\
&\approx \frac{1200}{0,68} \;=\; \text{переписываем в более удобном виде}\\
&= \frac{120\cdot 10^1}{68\cdot 10^{-2}} \;=\; \text{«отсоединяем» степени десяти}\\
&= \frac{120}{68}\cdot 10^1\cdot 10^2 \;=\; \text{выполняем деление}\\
&= 1{,}76\ldots\cdot 10^3 \;\approx\; \text{округляем}\\
&\approx 1{,}8\cdot 10^3.
\end{aligned}$$

В общем случае, пусть x и y — произвольные десятичные дроби ($y \neq 0$). Тогда их частное x/y вычисляется с точностью до k значащих цифр следующим образом.

Округлим каждое из чисел x и y до k значащих цифр и представим результат в виде

$x \approx a \cdot 10^n,$
$y \approx b \cdot 10^m,$

где a, b, n и m — целые числа (для удобства последующего деления число a может содержать концевые нули). Теперь находим частное чисел a и b, округленное до k значащих цифр::

$c \approx a/b.$

Результат деления x на y равен

$x/y \approx c \cdot 10^{n-m}.$

Конспект

1. Округление десятичных дробей производится по тем же правилам, что и для целых чисел, — с той разницей, что зануляемые младшие разряды, если они находятся после запятой, отбрасываются. Концевые нули сохраняются, однако, в том случае, если они содержат информацию о том, с какой точностью производилось округление.

2. *Стандартное представление* чисел: $x = a \cdot 10^n$, где a — десятичная дробь, такая что $1 \leqslant |a| < 10$, а n — целое число. При этом a называется *мантиссой*, а n — *порядком* числа x. Если число записано в стандартном представлении, то, благодаря возможности дописывать концевые нули, всегда можно укажать точность, с которой оно было получено. Например, точность числа $2{,}30 \cdot 10^5$ составляет три значащие цифры. Ноль в стандартном представлении записать нельзя.

3. Приближенное сложение, вычитание и умножение десятичных дробей сводится к соответствующим операциям с целыми числами.

4. *Приближенное деление.* Пусть x и y — произвольные десятичные дроби ($y \neq 0$). Округляем их до k значащих цифр и представляем результат в виде $x \approx a \cdot 10^n$, $y \approx b \cdot 10^m$, где a, b, n и m — целые числа. Пусть c — частное чисел a и b, округленное до k значащих цифр: $c \approx a/b$. Тогда (также с точностью до k значащих цифр): $x/y \approx c \cdot 10^{n-m}$.

3.14. Единицы измерения и размерность

Единицы измерения

Я уже не раз говорил, что число, само по себе, — это ничего не значащая бессмыслица. Иногда это становится особенно очевидно. Допустим, мы зашли в ювелирный магазин и увидели там красивый камушек.

— Сколько он стоит? — хотим мы знать.

— Пятьдесят, — отвечают нам.

Удовлетворил ли такой ответ наше любопытство? — Нет, потому что «пятьдесят» бывают разные, например:

50 копеек,
50 рублей,
50 тысяч рублей.

Пояснительные слова (такие как *копейки*, *рубли*, *тысячи рублей*), стоящие при числах и придающие им смысл, называются *единицами измерения* или же просто *единицами*. Число вместе с сопутствующей ему единицей измерения называется (*физической*) *величиной*. При решении практических задач, опускать единицы измерения допустимо только в том случае, если мы заранее договоримся, какие именно единицы мы используем. Например, мы могли бы спросить:

— Сколько рублей стоит этот камушек?

Тогда ответ «пятьдесят» оказался бы вполне осмысленным и исчерпывающим.

Рассмотрим такую задачу. У Дениса в одном кармане $1{,}5$ тысяч рублей, а в другом — еще 300 рублей. Спрашивается, сколько всего у Дениса денег? Очевидно, содержимое обоих карманов надо сложить, и чисто формально решение задачи можно записать так:

$$1{,}5\,\textit{тыс. руб.} + 300\,\textit{руб.}$$

С практической точки зрения, однако, подобное решение является неудовлетворительным. Допустим, мы хотим проделать вычисления с помощью калькулятора. В калькулятор нельзя ввести никаких единиц измерения, а только «голые» числа. Как тут быть? Очевидно, единицы измерения придется просто отбросить. Но не так:

$$1{,}5 + 300,$$

потому что в этом случае получается полная чушь. Нам нужно прежде всего договориться об общей единице измерения для обоих слагаемых. Пусть это будет, например, рубль. Мы знаем, что

$$\textit{тыс. руб.} \;=\; 1000\,\textit{руб.}$$

Поэтому, сделав подстановку, мы можем переписать нашу сумму в таком виде:

$$\begin{aligned}
&1{,}5\ \boxed{\textit{тыс. руб.}}\ +\ 300\,\textit{руб.}\ = \\
&= 1{,}5\ \cdot\ \boxed{1000\,\textit{руб.}}\ +\ 300\,\textit{руб.}\ = \\
&= 1500\,\textit{руб.}\ +\ 300\,\textit{руб.}
\end{aligned}$$

Таким образом, мы выразили все слагаемые в одинаковых единицах измерения, а именно — в рублях. Теперь эти единицы измерения позволительно отбросить, чтобы проделать вычисления на калькуляторе:

$$1500 + 300 = 1800.$$

Получив численный ответ, мы восстанавливаем отброшенную ранее единицу измерения и получаем окончательно

$$1800\,\textit{руб.}$$

Подобным же образом задачу можно решить, проделав вычисления в тысячах рублей:

$$\begin{aligned}
&1{,}5\,\textit{тыс. руб.}\ +\ 300\ \boxed{\textit{руб.}}\ =\ \text{делаем подстановку} \\
&= 1{,}5\,\textit{тыс. руб.}\ +\ 300\ \cdot\ \boxed{0{,}001\,\textit{тыс. руб.}}\ =\ \text{упрощаем} \\
&= 1{,}5\,\textit{тыс. руб.}\ +\ 0{,}3\,\textit{тыс. руб.}\ =\ \text{отбрасываем ед. измерения} \\
&= 1{,}5 + 0{,}3 =\ \text{считаем на калькуляторе} \\
&= 1,8 =\ \text{восстанавливаем ед. измерения} \\
&= 1{,}8\,\textit{тыс. руб.}
\end{aligned}$$

Или же в копейках:

$$\begin{aligned}
&1{,}5\ \textit{тыс. руб.}\ +\ 300\ \textit{руб.}\ =\\
&= 1{,}5\ \cdot\ 100000\ \textit{коп.}\ +\ 300 \cdot\ 100\ \textit{коп.}\ =\\
&= 150000\ \textit{коп.}\ +\ 30000\ \textit{коп.}\ =\\
&= 150000 + 30000 =\\
&= 180000 =\\
&= 180000\ \textit{коп.}
\end{aligned}$$

Ответ мы во всех случаях получили одинаковый, потому что

$$1800\ \textit{руб.}\ =\ 1{,}8\ \textit{тыс. руб.}\ =\ 180000\ \textit{коп.}$$

На этих примерах мы видим, что

> единицы измерения ведут себя как параметры, которые принимают разные числовые значения в зависимости от того, какую единицу измерения мы используем в численных расчетах.

Если мы проводим расчеты в рублях, тогда

$$\begin{aligned}
&\textit{руб.}\ =\ 1,\\
&\textit{тыс. руб.}\ =\ 1000.
\end{aligned}$$

Если мы проводим расчеты в тысячах рублей, тогда

$$\begin{aligned}
&\textit{руб.}\ =\ 0{,}001,\\
&\textit{тыс. руб.}\ =\ 1.
\end{aligned}$$

А если расчеты проводить в копейках, то

$$\begin{aligned}
&\textit{коп.}\ =\ 1,\\
&\textit{руб.}\ =\ 100,\\
&\textit{тыс. руб.}\ =\ 100000.
\end{aligned}$$

Это наблюдение имеет первостепенную важность, потому что оно дает нам возможность обращаться с единицами измерения так, как если бы они были числами. Например, обретает смысл выражение

$$3\ \textit{руб.}\ \cdot\ 5.$$

Действительно, если мы условимся проводить вычисления в рублях, то *руб.* $= 1$, и тогда

$$3\ \textit{руб.}\ \cdot\ 5 = 3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 = 15 = 15\ \textit{руб.}$$

Теперь мы, наконец, можем во всех случаях с полным правом пользоваться коммутативностью (переместительностью) умножения:

$$ab = ba,$$

не заботясь о том, что именно подразумевается под параметрами a и b: разы, рубли, люди, поросята или что-то еще.

Более того, на единицы измерения можно делить. Допустим, мы купили 5 кг картошки, уплатив за покупку 100 руб. Тогда цена картошки равна

$$\frac{100\ \textit{руб.}}{5\ \textit{кг}} = 20\ \frac{\textit{руб.}}{\textit{кг}}.$$

то есть двадцать рублей за килограмм. Теперь мы можем, например, рассчитать, сколько денег придется уплатить за 10 *кг* картошки:

$$20\,\frac{\textit{руб.}}{\textit{кг}}\cdot 10\,\textit{кг}=\frac{20\,\textit{руб.}\cdot 10\,\cancel{\textit{кг}}}{\cancel{\textit{кг}}}=20\,\textit{руб.}\cdot 10=40\,\textit{руб.}$$

В ходе этих вычислений мы сократили дробь на «*кг*», как это мы раньше проделывали с обычными числами.

Перевод из одной единицы измерения в другую

Допустим, к нам в гости приехал иностранец, и он плохо представляет себе, что означает, что цена картошки равна 20 *руб./кг*. Он просит нас перевести эту цену в евро за центнер (€/*ц*). При этом известно, что

$$\begin{aligned}1\,€ &= 50\,\textit{руб.},\\ 1\,\textit{ц} &= 100\,\textit{кг}.\end{aligned}$$

Просьбу нашего гостя можно исполнить двумя способами.

Первый способ — подстановка. Мы, собственно, этим способом уже пользовались раньше. Сперва мы должны выразить рубли через евро, а килограммы — через центнеры:

$$\begin{aligned}1\,\textit{руб.} &= (1/50)\,€ = 0{,}02\,€,\\ 1\,\textit{кг} &= (1/100)\,\textit{ц} = 0{,}01\,\textit{ц}\,.\end{aligned}$$

Выполняем подстановку и получаем:

$$20\,\frac{\textit{руб.}}{\textit{кг}}=20\,\frac{0{,}02\,€}{0{,}01\,\textit{ц}}=40\,\frac{€}{\textit{ц}}$$

Второй способ — «умножение на единицу». Удобство этого способа заключается в том, что нам не нужно выражать рубли через евро, а килограммы через центнеры. Достаточно заметить, что

$$\frac{1\,€}{50\,\textit{руб.}}=1,$$

$$\frac{100\,\textit{кг}}{1\,\textit{ц}}=1.$$

Умножаем исходную величину на единицы, записанные в таком виде, и получаем:

$$20\,\frac{\textit{руб.}}{\textit{кг}}=20\,\frac{\cancel{\textit{руб.}}}{\cancel{\textit{кг}}}\cdot\frac{1\,€}{50\,\cancel{\textit{руб.}}}\cdot\frac{100\,\cancel{\textit{кг}}}{1\,\textit{ц}}=20\cdot\frac{1\,€}{50}\cdot\frac{100}{1\,\textit{ц}}=40\,\frac{€}{\textit{ц}}.$$

Второй способ является несколько более интеллектуальным, так как надо еще сообразить, в каком виде записать единицы, чтобы «лишние» единицы измерения благополучно сократились.

Размерность

Допустим, цена картошки в ближайшем магазине равна 20 *руб./кг*, а в каком-нибудь американском супермаркете картошку продают по цене $0{,}5$ долларов за фунт ($\$/\textit{ф}$). Тогда мы говорим, что цена картошки *выражена в разных единицах*. Это различие вызвано тем, что мы пока не договорились с американцами о том, чтобы использовать одинаковые единицы измерения для количества денег и веса картошки.

Но допустим, что такой договор был достигнут, и для удобства российских туристов цена на картошку в американском супермаркете стала указываться как 40 *руб./кг*. Побывав в этом супермаркете, покупатель может, например, купить 3 *кг* картошки, заплатив за покупку 120 *руб.* Выпишем приведенные величины еще раз:

Цена картошки: 40 *руб./кг.*
Вес картошки: 3 *кг.*
Платеж за покупку: 120 *руб.*

Обратите внимания, что *руб./кг* $\neq$ *кг* $\neq$ *руб.* При этом никакими договорами, никакими переводами одних единиц в другие мы не можем сделать так, чтобы цена, вес и платеж были выражены в одних и тех же единицах измерения. Говорят, что эти величины имеют *разные размерности*. В противоположность этому, цена на картошку и цена на помидоры всегда имеет *одинаковую размерность*, равную размерности платежа, поделенной на размерность веса. Соотношение между размерностями может быть записано в виде равенства:

$$\text{цена} = \text{платеж} \ / \ \text{вес}.$$

Величины, имеющие разные размерности, нельзя сравнивать между собой и нельзя складывать ни при каких обстоятельствах. Например, мы не можем сказать, что 120 рублей больше трех килограммов, а следующие суммы представляют из себя полный абсурд:

$$3\,\textit{кг} \ + 120\,\textit{руб.},$$
$$40\,\textit{руб.}/\textit{кг} \ + 3\,\textit{кг}.$$

Спрашивается: а можно ли сказать, что «120 рублей» и «3 доллара» имеют одинаковую размерность? Хотя по логике вещей это и не было бы ошибкой, но так обычно не говорят. Размерности, как правило, сравнивают между собой лишь после того, как договорятся применять одинаковые единицы измерения всегда, когда это только возможно.

Представление о размерности оказывается чрезвычайно полезным при решении задач. Предположим, нас спрашивают: сколько картошки можно купить на 100 *руб.*, если она стоит 20 *руб./кг*? Допустим, мы вообще не поняли смысла задачи. Тем не менее, мы запросто можем написать правильный ответ. В самом деле, нам даны две величины: 100 *руб.* и 20 *руб./кг*. Поскольку размерности у них разные, мы не можем ни складывать их, ни вычитать друг из друга. Остается только умножать или делить. Попробуем для начала умножить:

$$100\,\textit{руб.} \cdot 20\,\frac{\textit{руб.}}{\textit{кг}} = 2000\,\frac{\textit{руб.}^2}{\textit{кг}}.$$

По размерности полученного ответа (*руб.*^{2}/*кг*) мы сразу же видим, что он неверен, потому что количество картошки никак не может выражаться в таких диковинных единицах. Попробуем деление:

$$\frac{20\,\dfrac{\textit{руб.}}{\textit{кг}}}{100\,\textit{руб.}} = 0{,}2\,\frac{1}{\textit{кг}}.$$

И снова размерность результата (1/*кг*) говорит нам о том, что мы оказались на ложном пути. У нас остается последняя возможность — воспользоваться делением еще раз, поменяв местами числитель и знаменатель:

$$\frac{100\,\textit{руб.}}{20\,\dfrac{\textit{руб.}}{\textit{кг}}} = 5\,\textit{кг}.$$

На этот раз размерность получилась подходящей. В чем же еще измерять количество картошки, как не в килограммах! Теперь у нас есть все основания полагать, что решение, которое мы подобрали, — правильное. Конечно, для полной уверенности лучше разобраться в сути задачи. Однако же и подсказками, которые дают нам размерности, пренебрегать ни в коем случае не следует.

Безразмерные величины

Допустим, мы хотим знать, во сколько раз цена картошки в американском супермаркете больше, чем в ближайшем магазине. Это находится таким образом:

$$\frac{40\,\textit{руб.}/\textit{кг}}{20\,\textit{руб.}/\textit{кг}} = 2.$$

Здесь размерности (*руб./кг*) в числителе и в знаменателе сократились, и в результате мы получили *безразмерную величину*. Мы говорим, однако: цена картошки в одном магазине в 2 *раза* больше, чем в другом. Что же это за размерность такая — разы, и откуда она взялась, если в формуле, по которой мы нашли ответ, ее не было? Это противоречие легко разрешить, заметив что

$$\text{раз} = 1.$$

Действительно, при переходе к расчетам на калькуляторе, «раз» всегда заменяется на «1», какими бы единицами измерения мы ни пользовались для других величин. Таким образом, всякая величина, которая измеряется в разах, является безразмерной. Тут уместно, пожалуй, вспомнить, как русскоязычные люди пересчитывают предметы:

Раз, два, три, четыре, пять...

Вообще, все численные величины, которые являются результатом подобного простого пересчета, являются безразмерными, например:

5 штук,
10 человек,
15 поросят
и т. п.

Причина этому всё та же: ведя расчеты на калькуляторе, мы всегда заменяем «штуку», «человека» и «поросенка» на «1». И всё-таки даже такие «безразмерные единицы измерения» лучше по возможности не опускать, потому что они придают числам осмысленность.

Рассмотрим такую задачу. Имеется 5 коробок с шоколадными конфетами по 20 конфет в каждой. Сколько всего конфет? Поскольку число коробок и число конфет являются величинами безразмерными, не будет ошибкой представить решение в следующем виде:

$$5 \cdot 20 = 100.$$

Но гораздо лучше написать так:

$$5\,\textit{кор.} \ \cdot \ 20\,\textit{конф.}/\textit{кор.} \ = \ 100\,\textit{конф.}$$

Такая запись и нагляднее, и менее подвержена ошибкам.

Конспект

1. Числа обретают смысл, только когда сопровождаются пояснительными словами: мы не знаем, что такое «три», но мы знаем, что такое «три рубля». Пояснительные слова (такие

как копейки, рубли, тысячи рублей), стоящие при числах и придающие им смысл, называются *единицами измерения*. Число вместе с сопутствующей ему единицей измерения называется (*физической*) *величиной*.

2. При сложении и вычитании физических величин нужно позаботиться о том, чтобы они были выражены в одинаковых единицах измерения, например:

$$\begin{aligned} 1{,}5\,\textit{тыс. руб.} \;+\; 300\,\textit{руб.} \;&=\; 1{,}5\cdot 1000\,\textit{руб.} \;+\; 300\,\textit{руб.}\\ &=\; 1500\,\textit{руб.} \;+\; 300\,\textit{руб.} \;=\; 1800\,\textit{руб.}\\ 1{,}5\,\textit{тыс. руб.} \;+\; 300\,\textit{руб.} \;&=\; 1{,}5\,\textit{тыс. руб.} \;+\; 300\cdot 0{,}001\,\textit{тыс. руб.}\\ &=\; 1{,}500\,\textit{тыс. руб.} \;+\; 0{,}3\,\textit{тыс. руб.} \;=\; 1{,}8\,\textit{тыс. руб.} \end{aligned}$$

3. С единицами измерения можно обращаться как с параметрами, которые принимают разные числовые значения в зависимости от того, в каких единицах мы проводим численные расчеты. Так, если мы проводим вычисления в рублях, то $\textit{руб.} = 1$; $\textit{тыс. руб.} = 1000$. Если мы проводим расчеты в тысячах рублей, тогда $\textit{руб.} = 0{,}001$; $\textit{тыс. руб.} = 1$. В частности, на единицы измерения можно умножать в любом порядке, а также делить на них.

4. Перевод из одной единицы измерения в другую:

Способ 1. Подстановка.

$$20\,\frac{\textit{руб.}}{\textit{кг}} = 20\,\frac{0{,}02\,€}{0{,}01\,\textit{ц}} = 40\,\frac{€}{\textit{ц}}.$$

Способ 2. «Умножение на единицу».

$$20\,\frac{\textit{руб.}}{\textit{кг}} = 20\,\frac{\textit{руб.}}{\textit{кг}}\cdot\frac{1\,€}{50\,\textit{руб.}}\cdot\frac{100\;\textit{кг}}{1\,\textit{ц}} = 20\cdot\frac{1\,€}{50}\cdot\frac{100}{1\,\textit{ц}} = 40\,\frac{€}{\textit{ц}}.$$

5. Говорят, что две физические величины имеют *разную размерность*, если их единицы измерения нельзя перевести одна в другую. Пример: цена картошки и ее вес. Величины, имеющие разную размерность, невозможно сравнивать и невозможно складывать между собой.

6. Понятие размерности позволяет иногда угадывать решение задачи без понимания ее сути. Пусть, например, спрашивается: сколько картошки можно купить на $100\,\textit{руб.}$, если она стоит $20\,\textit{руб.}/\textit{кг}$? Единственное решение, обеспечивающее правильную размерность ответа, таково:

$$\frac{100\,\textit{руб.}}{20\,\textit{руб.}/\textit{кг}} = 5\,\textit{кг}.$$

7. Когда мы проводим численные расчеты с такими величинами, как «2 раза», «5 штук», «15 поросят», мы всегда заменяем сопроводительные слова (разы, штуки, поросята) на единицу. Подобные величины называются *безразмерными*. Хотя при решении задач «безразмерные единицы» сохранять необязательно, они придают решению наглядность и в какой-то мере защищает от ошибок. Например, если у нас есть 5 коробок по 20 конфет в каждой, то всего конфет:

$$5\,\textit{кор.}\;\cdot\;20\,\textit{конф.}/\textit{кор.}\;=\;100\,\textit{конф.}$$