2. Основы математического языка

2.1. Выражения, равенства, неравенства

На бумаге написан пример на сложение:

$$3 + 2 = 5.$$

Как это можно прочитать? До сих пор мы обычно говорили: «Три плюс два равно пять». Но можно сказать и по-другому. Например:

— Три и два — это пять.
— К трем прибавить два будет пять.
— Складываем три и два, в результате получаем пять.
— Три увеличить на два станет пять.
— Сумма чисел три и два равна пяти.

Кстати, «роли», которые играют числа в этой записи, имеют такие названия:

$$\boxed{\text{первое слагаемое} + \text{второе слагаемое} = \text{сумма}}$$

Подобным же образом пример на вычитание

$$5 - 2 = 3$$

читается не только как «пять минус два равно три», но и как:

— Пять без двух — это три.
— От пяти отнять два будет три.
— Из пяти вычесть два получится три.
— Пять уменьшить на два составит три.
— Разность чисел пять и два равна трем.
— Если уменьшаемое равно 5, а вычитаемое равно 2, то разность равна 3.

«Роли» чисел в примерах на вычитание называются так:

$$\boxed{\text{уменьшаемое} - \text{вычитаемое} = \text{разность}}$$

В бытовом языке символ «=» допустимо читать как «будет» или «получится». Однако, следует иметь в виду, что на самом деле символ «=» означает «это столько же, сколько». Ведь можно написать не только так:

$$4 + 3 = 7,$$

но и так:

$$7 = 4 + 3 :$$

Семь — *это столько же, сколько* четыре плюс три.

Рассмотрим такую ситуацию. У Дениса есть 5 конфет. Его младший брат Матвей просит:

— Поделись, пожалуйста, со мной.

Денис раскладывает конфеты на две кучки. Одну кучку оставляет себе, другую дает Матвею. Спрашивается: как 5 конфет можно поделить на две кучки? Возможные ответы:

$5 = 1 + 4;$ (Денис оставляет одну конфету себе, а четыре дает Матвею)

$5 = 2 + 3;$

$5 = 3 + 2;$

$5 = 4 + 1.$

Но это еще не все возможные варианты. Может оказаться так, что Денису эти конфеты вообще не нравятся, и он все их отдает Матвею:

$$5 = 0 + 5.$$

А, может быть, Денис вовсе не захочет делиться конфетами, и тогда следует написать так:

$$5 = 5 + 0.$$

Все эти ответы можно объединить в одну строчку:

$$5 = 0 + 5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1 = 5 + 0.$$

Допустим, что какой-нибудь взрослый дядя — непрошеный экзаменатор — спросит у Дениса:

— Считать умеешь? А ну-ка сложи два и три, чему это равно?

Денис теперь смело может ответить:

— Это равно три плюс два.

И Денис будет совершенно прав. Действительно,

$$2 + 3 = 3 + 2.$$

Но как же тогда грамотно попросить вычислить «два плюс три», чтобы ответом было одно-единственное число?

Грамотный вопрос звучит так:

— Чему равно значение выражения $2 + 3$?

Математическим выражением называется всё, про что можно спросить: «Это сколько? Какому числу это равно?» Мы уже встречались с такими выражениями, как «$2 + 3$», «$5 - 2$». Числа сами по себе тоже являются выражениями. Ведь не будет ошибкой утверждать, что

$$2 = 2.$$

Значит, «2» — это выражение.

Ответ на вопрос: «Это сколько? Какому числу это равно?» — называется *значением* выражения. Например, значением выражения «$2+3$» является «5». Записывается это уже знакомым нам способом:

$$2 + 3 = 5.$$

Если два выражения имеют одно и то же значение, то между ними ставится знак «=» и полученная запись называется *равенством*, например:

$$1 + 4 = 2 + 3;$$
$$7 = 2 + 5.$$

Мы уже знаем, что равенства могут образовывать цепочки:

$$5 = 0 + 5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1 = 5 + 0.$$

Если два выражения имеют разные значения, то ставить знак равенства «=» между ними было бы неверно, но можно поставить другой знак, а именно «$\neq$». Например,

$$1 \neq 2; \qquad \text{(читается: один не равен двум)}$$
$$3 + 2 \neq 4; \qquad \text{(три плюс два не равно четырем)}$$
$$10 \neq 7 - 3. \qquad \text{(десять не равно семи минус три)}$$

Такие записи называются *неравенствами*. Однако такого рода неравенства часто оставляют некоторую неудовлетворенность. Вряд ли Денис скажет:

— Мой возраст неравен возрасту Матвея.

Скорее всего, он выразится так:

— Я старше Матвея. Мне больше лет, чем ему. Матвей младше меня. Ему меньше лет, чем мне.

Мы знаем, что Денису 7 лет, а Матвею 5. Мы можем записать так:

$7 > 5$ (читается: семь больше пяти; или: семь больше, чем пять)

или же:

$5 < 7.$ (пять меньше семи; пять меньше, чем семь)

Через три года оба будут взрослее, но Денис так и останется старше Матвея:

$7 + 3 > 5 + 3;$ (семь плюс три больше, чем пять плюс три)

$5 + 3 < 7 + 3.$ (пять плюс три меньше, чем семь плюс три)

Записи, в которых присутствует символ «$>$» («больше») или «$<$» («меньше») тоже называются неравенствами. Неравенства могут образовывать цепочки:

$$0 < 1 < 2 < 3;$$

$$3 > 2 > 1 > 0.$$

Допустимы также смешанные цепочки, в которых присутствуют как равенства, так и неравенства. Пусть, например, спрашивается: что больше

$7 + 3$ или $5 + 3$?

Ответ на этот вопрос удобно представить в следующем виде:

$$7 + 3 = 10 > 8 = 5 + 3.$$

Вероятно, иногда Денису захочется сказать так:

— Я старше Матвея на два года. Мне на два года больше, чем ему. Матвей младше меня на два года. Ему на два года меньше, чем мне.

Чтобы это записать с помощью чисел, снова понадобятся равенства. Такую запись можно сделать разными способами:

$$7 = 5 + 2;$$

$$5 = 7 - 2;$$

$$2 = 7 - 5.$$

Теперь поговорим о словах, которые принято употреблять, когда мы говорим об умножении и делении нацело. Пусть дан пример на умножение

$$3 \cdot 5 = 15.$$

Эту запись можно прочитать следующими разными способами:

3 умножить на 5 равно 15;

произведение чисел 3 и 5 равно 15;

число 3 увеличили в 5 раз и получили 15;

число 5 увеличили в 3 раза и получили 15;

число 15 в 5 раз больше числа 3;

число 15 в 3 раза больше числа 5.

«Роли» в примерах на умножение распределяются таким образом:

$$\boxed{\text{первый (со)множитель} \cdot \text{второй (со)множитель} = \text{произведение}}$$

В школе произведения всех чисел, которые меньше или равны десяти, записывают в виде большой скучной таблицы, называемой таблицей умножения. Эту таблицу заставляют учить наизусть. Для облегчения зубрежки, в русском языке для произведений из таблицы умножения имеются специальные названия, например,

$2 \cdot 2$ — дважды два;

$3 \cdot 6$ — трижды шесть;

$4 \cdot 5$ — четырежды пять;

$5 \cdot 8$ — пятью восемь

и тому подобное.

Рассмотрим теперь деление нацело:

$15/3 = 5.$

Прочесть эту запись можно так:

15 поделить на 3 равно 5;

15 разделить на 3 равно 5;

частное от деления числа 15 на число 3 равно 5;

отношение чисел 15 и 3 равно 5;

число 5 в 3 раза меньше числа 15.

«Роли» в примерах на деление распределяются так:

$$\boxed{\text{делимое} \,/\, \text{делитель} = \text{частное}}$$

О сложении, вычитании, умножении и делении часто говорят как о четырех арифметических действиях или же четырех арифметических операциях. (Арифметикой называется раздел математики, занимающийся числами и действиями с ними.) При этом под делением понимается не только деление нацело, но и более общий способ деления, с которым мы познакомимся позже.

Конспект

1. *Математическим выражением* называется всё, про что можно спросить: «Это сколько? Какому числу это равно?» Ответ на этот вопрос называется *значением выражения*. Число, само по себе, также является выражением.

2. Между выражениями с одинаковым значением ставится знак равенства «$=$». Полученная запись называется *равенством*. Между выражениями с разными значениями ставится знак «$\neq$», а также знаки «$<$» («меньше») или «$>$» («больше»). Такие записи называются *неравенствами*.

3. Понятия «*больше на*», «*меньше на*», «*больше в*», «*меньше в*». Пусть дано число 6.
Число, которое на 2 больше, — это $6 + 2 = 8$.
Число, которое на 2 меньше, — это $6 - 2 = 4$.
Число, которое в 3 раза больше, — это $3 \cdot 6 = 6 \cdot 3 = 18$.
Число, которое в 3 раза меньше, — это $6/3 = 2$.

4. *Четыре арифметические действия* (*операции*) и «роли их участников»:
Сложение: первое слагаемое + второе слагаемое = сумма
Вычитание: уменьшаемое − вычитаемое = разность
Умножение: первый (со)множитель · второй (со)множитель = произведение
Деление: делимое / делитель = частное

Задачи

2.1.1. Какие два числа надо сложить, чтобы результат был равен четырем? Выписать все возможные ответы.

2.1.2. Какое число надо вычесть из какого, чтобы результат был равен двум? Написать один из возможных ответов.

2.1.3. Указать, что из следующих записей является выражением, что равенством, что неравенством, что бессмыслицей. Какие из равенств и неравенств являются верными, а какие нет?

	2
1	25
10	$25 -$
$10 +$	$25 - 5$
$10 + 8$	$25 - 5 >$
$10 + 8 =$	$25 - 5 > 1$
$10 + 8 = 1$	$25 - 5 > 10$
$10 + 8 = 18$	$25 - 5 > 10 +$
	$25 - 5 > 10 + 2$
	$25 - 5 > 10 + 20$

2.1.4. Найти значение выражений

$37 + 54$
$98 - 73$
и т. п.

2.1.5. Сравнить выражения (поставить между ними знак =, > или <):

$45 + 18$ __ $71 - 16$
$78 - 14$ __ $13 + 56$
и т. п.

Пример записи решения:

$63 = 45 + 18 > 71 - 16 = 55.$

2.1.6. У Дениса 25 конфет, а у Матвея на 3 конфеты меньше. Сколько конфет у Матвея?

2.1.7. У Дениса 25 конфет, а у Матвея на 3 конфеты больше. Сколько конфет у Матвея?

2.1.8. У Дениса 25 конфет, а у Матвея 23 конфеты. У кого конфет больше и насколько?

2.1.9. У Дениса 33 конфеты, а у Матвея 35 конфет. У кого конфет меньше и насколько?

2.1.10. У Дениса было 25 конфет, а у Матвея было 23 конфеты. Денис съел 4 конфеты. У кого конфет теперь больше и насколько?

2.1.11. (Маленькая провокация) У Дениса было 25 конфет, а у Матвея было 23 конфеты. Денис съел 2 конфеты. У кого конфет теперь меньше и насколько?

2.1.12. У Дениса было 25 конфет, а у Матвея 23 конфеты. Денис съел 14 конфет, а Матвей съел 10 конфет. У кого конфет стало больше и насколько?

2.1.13. Папа дал Денису 10 конфет, а Матвею 5 конфет. Матвей сказал: «Так нечестно», — и попросил Дениса поделиться с ним еще конфетами. После этого Денис дал Матвею 2 конфеты. Стало ли у них конфет поровну? Если нет, у кого больше и насколько?

2.1.14. Денису 7 лет, а Матвею 5 лет. Сколько лет будет Матвею, когда Денису будет 10 лет? Сколько лет будет Денису, когда Матвею будет 10 лет?

2.1.15. У Дениса 20 конфет, а у Матвея в два раза меньше. Сколько конфет у Матвея?

2.1.16. У Дениса 5 конфет, а у Матвея в 3 раза больше. Сколько конфет у Матвея?

2.1.17. Начиная с этого этапа, задачи можно брать из пособий и задачников, официально рекомендованных для школьников и продающихся в книжных магазинах. Однако такие задачи часто сформулированы весьма заумно и требуют дополнительного редактирования. Например, имеется следующая задача (О. В. Узорова. 3000 задач и примеров по математике: 3-4 кл. Москва, 2001):

«Камни, которые врезаются в атмосферу Земли и полностью в ней сгорают, называются метеорами. Они загораются на высоте 100 км, и, горя, летят еще 30 км. Сколько километров до Земли остается пролететь пыли и пеплу от этого метеора?»

Если предложить ребенку задачу именно в таком виде, то есть риск погрязнуть в объяснениях относительно того, откуда берутся метеоры, чем они отличаются от метеоритов, что такое атмосфера, почему тела нагреваются при трении о воздух, и, вообще, как устроена Вселенная. Это всё вещи, конечно, интересные, но, раз уж мы решили заниматься математикой, то лучше ту же самую задачу перевести на более привычный язык. Вот один из возможных вариантов:

«От подъезда дома до магазина, где продается мороженое, 100 шагов. Папа отправился в магазин, чтобы купить Денису мороженое. Он прошел уже 30 шагов. Сколько шагов ему осталось пройти?»

2.2. Составные выражения, скобки

Допустим, у Дениса было 5 конфет, мама дала ему еще 3 конфеты, а папа — еще одну конфету. Сколько конфет стало у Дениса? Такая задача решается в два действия.

> Первое: $5+3 = 8$. Столько конфет стало у Дениса после того, как он получил конфеты от мамы.
>
> Второе: $8 + 1 = 9$. Столько конфет стало у Дениса в конечном итоге.

Это же самое решение можно представить в виде одной-единственной строчки. Поскольку «8» было получено как «$5+3$», то во втором равенстве «8» можно заменить на «$5+3$»:

До замены: $8 + 1 = 9$.

После замены: $(5+3) + 1 = 9$.

Новую вставку принято *заключать в скобки*. Таким образом, если в каком-нибудь длинном выражении встречаются скобки, это говорит о том, что в первую очередь следует выполнять действия внутри скобок. В нашем примере порядок выполнения действий таков:

$$\overset{[1]}{(5+3)} \overset{[2]}{+} 1 = 8 + 1 = 9.$$

На этот раз оказалось, что действия выполняются в самом привычном порядке — слева направо. В этом особом случае скобки можно вообще не писать. Смысл выражения остается тем же самым:

$$\overset{[1]}{5+3} \overset{[2]}{+} 1 = 8 + 1 = 9.$$

Однако ту же самую задачу можно решить и по-другому.

Первое действие: $3+1 = 4$. Столько конфет получил Денис от мамы и папы.

Второе действие: $5 + 4 = 9$. Столько конфет оказалось у Дениса.

В одну строку это записывается так:

$$5 \overset{[1]}{+} (\overset{[2]}{3+1}) = 5 + 4 = 9.$$

Итак, у нас есть два разных решения одной и той же задачи, и им соответствуют два разных выражения, но значения этих выражений одинаковы, поэтому

$$5 + (3 + 1) = 5 + 3 + 1.$$

Это равенство показывает, каким образом можно избавиться от скобок, или, выражаясь более грамотно, как можно раскрыть скобки. В данном примере скобки можно просто стереть, а все остальное оставить без изменений. Но так просто дело обстоит далеко не всегда.

Задача 2.2.1. У Дениса было 5 конфет. 3 конфеты он дал маме, и еще одну конфету — папе. Сколько конфет осталось у Дениса? Эту задачу требуется решить двумя способами, причем каждое решение записать в виде одного-единственного выражения.

Решение. Первый способ

$5 - 3 = 2$. Столько конфет осталось у Дениса, после того как он поделился конфетами с мамой.

$2 - 1 = 1$. Столько конфет осталось у Дениса в конце концов.

Записываем решение в виде одного выражения:

$$5 - 3 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Второй способ

$3 + 1 = 4$. Столько конфет Денис отдал маме и папе.

$5 - 4 = 1$. Столько конфет осталось у Дениса.

Объединяем решение в одно выражение:

$$5 - (3 + 1) = 5 - 4 = 1.$$

Сравнивая два решения, мы убеждаемся, что

$$5 - (3 + 1) = 5 - 3 - 1.$$

На этот раз, для того чтобы раскрыть скобки, недостаточно их просто стереть. Требуется еще и поменять знак «$+$» на знак «$-$».

Задача 2.2.2. У Дениса было 7 конфет. Он решил поделиться конфетами с Матвеем. Он протянул Матвею 3 конфеты, однако в последний момент передумал и одну конфету забрал обратно. Сколько конфет стало у Дениса?

Решение. Первый способ

$7 - 3 = 4$. Столько конфет оставалось у Дениса, когда он протянул конфеты Матвею.

$4 + 1 = 5$. Столько конфет стало у Дениса в конечном итоге.

Единое выражение:

$$7 - 3 + 1 = 4 + 1 = 5.$$

Второй способ

$3 - 1 = 2$. Столько конфет досталось Матвею.

$7 - 2 = 5$. Столько конфет стало у Дениса.

Единое выражение:

$$7 - (3 - 1) = 7 - 2 = 3.$$

Сравнивая два решения, получаем:

$$7 - (3 - 1) = 7 - 3 + 1.$$

И на этот раз одного только стирания скобок недостаточно. Нужно еще поменять знак «$-$», который стоял в скобках, на знак «$+$».

Задача 2.2.3. У Дениса было 5 конфет. Мама подарила ему еще 3 конфеты, из которых одну Денис дал папе. Сколько конфет стало у Дениса?

Рассуждая, как обычно, получаем:

$$5 + (3 - 1) = 5 + 3 - 1.$$

Здесь, как и в самый первый раз, нужно просто стереть скобки. Почему же иногда этого оказывается достаточно, а иногда нет? Выпишем все наши наблюдения еще раз:

$$5 + (3 + 1) = 5 + 3 + 1;$$
$$5 + (3 - 1) = 5 + 3 - 1;$$
$$5 - (3 + 1) = 5 - 3 - 1;$$
$$5 - (3 - 1) = 5 - 3 + 1.$$

Ага! Теперь всё ясно. Если перед скобкой стоит «$+$», то скобки можно просто стереть, и больше ничего делать не требуется. Но если перед скобкой стоит «$-$», то нужно еще поменять тот знак, который стоял внутри скобки. *Сложение и вычитание в выражении без скобок выполняется в порядке слева направо.*

Выражения, содержащие умножение или деление

Разумеется, в составных выражениях могут встречаться не только сложение и вычитание, но также и умножение и деление. Если, решая какую-нибудь задачу, мы составили выражение из двух действий и в этом выражении в первую очередь надо выполнить умножение или деление, а во вторую очередь — сложение или вычитание, то скобки можно не ставить:

$$10 + (2 \cdot 3) = 10 + 2 \cdot 3 = 10 + 6;$$
$$10 + (6/2) = 10 + 6/2 = 10 + 3;$$
$$10 - (2 \cdot 3) = 10 - 2 \cdot 3 = 10 - 6;$$
$$10 - (6/2) = 10 - 6/2 = 10 - 3.$$

Точно так же:

$$(2 \cdot 3) + 10 = 2 \cdot 3 + 10 = 6 + 10 \quad \text{и т. п.}$$

Напротив, для того чтобы сперва выполнялось сложение или вычитание, следует воспользоваться скобками:

$$(10 + 2) \cdot 3 = 12 \cdot 3;$$
$$3 \cdot (10 + 2) = 3 \cdot 12.$$

Замечание. Знак умножения «·» перед скобкой обычно опускают, поэтому последнее равенство следовало бы переписать так:

$$3(10 + 2) = 3 \cdot 12.$$

Если же в выражении без скобок присутствуют только умножение и деление, то порядок действий — обычный, слева направо. Таково во всяком случае общее правило, с которым на практике мы будем иметь дело лишь в следующих двух случаях:

$(3 \cdot 4) \cdot 6 = 3 \cdot 4 \cdot 6$ (выражение содержит только умножение);

$(3 \cdot 4)/6 = 3 \cdot 4/6$ (единственное деление находится в самом конце).

При этом мы будем избегать записей вида

$12/4 \cdot 3$ (деление предшествует умножению) и

$12/4/3$ (выражение содержит более одного деления),

предпочитая вместо этого явно выписывать скобки:

$$(12/4) \cdot 3;$$

$$(12/4)/3.$$

Это поможет нам избежать путаницы в будущем, когда нам придется иметь дело с более сложными записями.

Разумеется, выражения могут состоять более чем из двух арифметических операций. Порядок действий в них определяется всё теми же тремя правилами:

1. Операции в скобках выполняются перед операциями вне скобок.
2. Умножение и деление выполняются перед сложением и вычитанием.
3. Операция, расположенная левее, выполняется перед операцией, расположенной правее.

Подразумевается, что мы обращаемся к правилу 2 лишь в том случае, когда не можем применить правило 1, а правило 3 вступает в силу только тогда, когда первых двух правил оказывается недостаточно.

Конспект

1. Порядок действий в составных выражениях определяется тремя правилами: (1) операции в скобках выполняются в первую очередь; (2) в отсутствии скобок умножение и деление выполняется перед сложением и вычитанием; (3) если первых двух правил оказывается недостаточно, операции выполняются слева направо.

2. *Правило раскрытия скобок в выражениях, состоящих из сложения и вычитания.* Если перед скобкой стоит знак «$+$», то скобку можно просто стереть. Если перед скобкой стоит знак «$-$», то, стерев скобку, нужно еще поменять те знаки, которые стояли внутри скобки. Например,

$$5+(3-1)=5+3-1;$$
$$5-(3-1)=5-3+1.$$

2.3. Отрицательные числа

Допустим, у Дениса очень много конфет — целая большая коробка. Сперва Денис съел 3 конфеты. Потом папа дал Денису 5 конфет. Потом Денис подарил Матвею 9 конфет. Наконец, мама дала Денису 6 конфет. Вопрос: Стало ли у Дениса в конечном итоге больше или меньше конфет, чем было вначале? Если больше, то насколько больше? Если меньше, то насколько меньше?

Для того чтобы не запутаться с этой задачей, удобно применить один трюк. Давайте выпишем подряд все числа из условия. При этом мы будем ставить знак «$+$» перед числами, которые обозначают, насколько конфет у Дениса прибавилось, и знак «$-$» перед числами, которые обозначают, насколько конфет у Дениса убавилось. Тогда всё условие выпишется очень коротко:

$$-3+5-9+6.$$

Эту запись можно прочитать, например, так: «Сперва Денис получил минус три конфеты. Потом плюс пять конфет. Потом минус девять конфет. И наконец плюс шесть конфет». Слово «минус» меняет смысл фразы на прямо противоположный. Когда я говорю: «Денис получил минус три конфеты», — это на самом деле означает, что у Дениса на три конфеты убыло. Слово «плюс», напротив, подтверждает смысл фразы. «Денис получил плюс пять конфет» означает то же самое, что и просто «Денис получил пять конфет».

Итак, сперва Денис получил минус три конфеты. Значит, у Дениса стало на минус три конфеты больше, чем было вначале. Для краткости можно сказать: у Дениса стало минус три конфеты.

Потом Денис получил плюс пять конфет. Легко сообразить, что у Дениса стало плюс две конфеты. Значит,

$$-3+5=+2.$$

Потом Денис получил минус девять конфет. И вот сколько конфет у него стало:

$$-3+5-9=+2-9=-7.$$

Наконец Денису досталось еще $+6$ конфет. И всего конфет стало:

$$-3+5-9+6=+2-9+6=-7+6=-1.$$

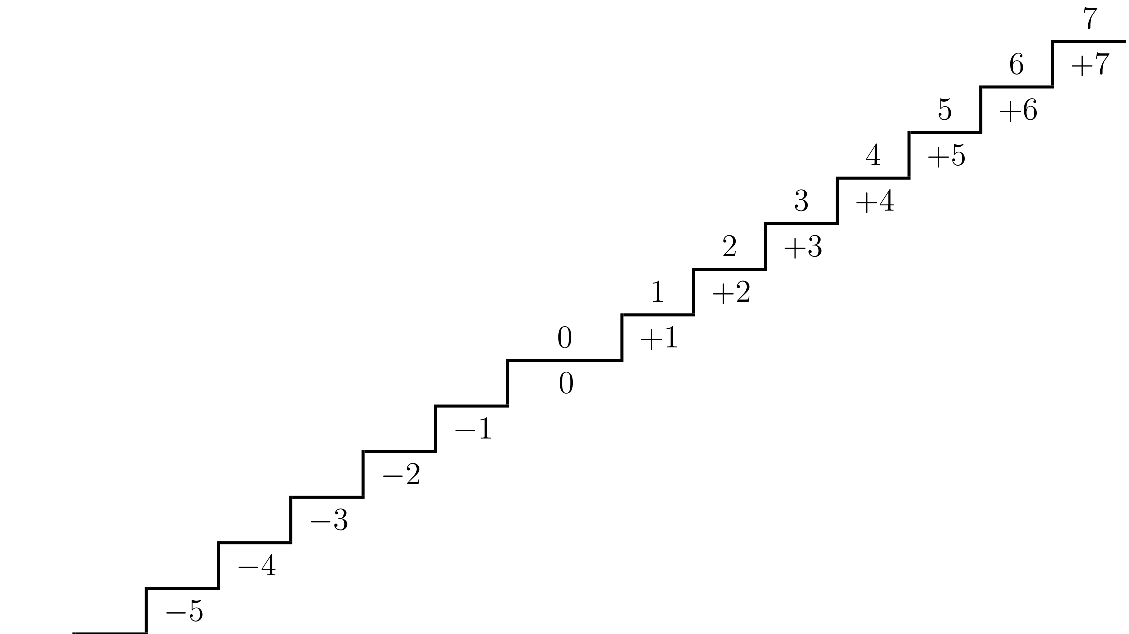
На привычном языке это означает, что в конце концов у Дениса оказалось на одну конфету меньше, чем было вначале. Задача решена.

Трюк со знаками «$+$» или «$-$» применяется очень широко. Числа, перед которым стоит знак «$+$», называются *положительными*. Числа со знаком «$-$» называются *отрицательными*. Число 0 (ноль) не является ни положительным, ни отрицательным, потому что $+0$ ничем не отличается от -0. Таким образом, мы имеем дело с числами из ряда

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots$$

Такие числа называются *целыми* числами. А те числа, с которыми мы имели дело до сих пор, не ставя перед ними никакого знака,, называются *натуральными* числами (только ноль не относится к натуральным числам).

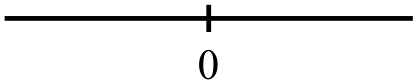
Как мы знаем, числа — в том числе и целые числа — сами по себе не существуют. Для того чтобы они обрели смысл, их надо обязательно связать с какими-то вещами из реального мира. Целые числа можно представить себе как ступеньки лестницы. Число ноль — это лестничная площадка, находящаяся вровень с улицей. Когда мы пересчитываем ступеньки, поднимаясь вверх, мы дописываем перед каждым числом знак «$+$», то есть пользуемся положительными числами. Когда же мы спускаемся вниз, в подвал, то добавляем к каждому номеру ступеньки знак «$-$», то есть применяем для пересчета отрицательные числа. Однако если нам не нужно заходить в подвал, то вполне достаточно одних только натуральных чисел и нуля. Натуральные числа — это, по сути дела, то же самое, что положительные целые числа.



Вместе с тем, во многих случаях удобнее представлять себе целые числа не как номера ступенек, а как команды, задающие перемещение по лестнице. Например, число $+3$ говорит, что следует подняться на три ступеньки вверх, а число -5 означает, что надо спуститься на пять ступенек вниз. Номер ступеньки совпадает с такой командой, которая перемещает нас на эту ступеньку, если начинать движение с нуля.

Вычисления с целыми числами легко проделывать, просто мысленно прыгая вверх или вниз по ступенькам — если, конечно, не потребуется делать слишком большие прыжки. Но как быть, когда надо прыгнуть на сто или более ступенек? Ведь не будем же мы рисовать такую длиннющую лестницу!

А впрочем, почему бы и нет? Мы можем нарисовать длинную лестницу с такого большого расстояния, на котором отдельные ступеньки уже неразличимы. Тогда наша лестница превратиться просто в одну прямую линию. А чтобы ее удобнее было поместить на страницу, нарисуем ее без наклона и отдельно отметим положение ступеньки 0.



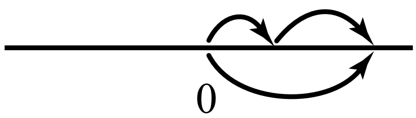
Поучимся вначале прыгать по такой прямой на примере выражений, значения которых мы уже давно умеем вычислять. Пусть требуется найти

$$40 + 50.$$

Строго говоря, раз уж мы имеем дело с целыми числами, то нам следовало бы написать

$$+40 + 50,$$

но у положительного числа, стоящего в начале строки, знак «$+$» обычно не ставят. Прыжки по лестнице выглядят приблизительно так:

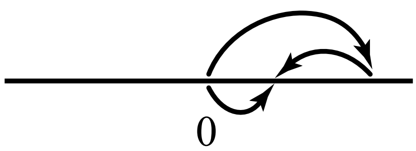


Вместо двух больших прыжков, нарисованных над прямой ($+40$ и $+50$), можно сделать один прыжок, нарисованный под прямой, причем длина этого прыжка, конечно, равна

$$40 + 50 = 90.$$

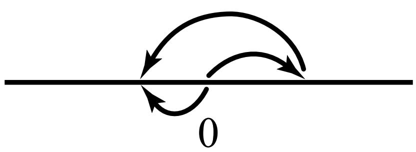
Такого рода рисуночки на математическом языке принято называть диаграммами. Вот как выглядит диаграмма для привычного нам примера на вычитание

$$90 - 50 = 40:$$



Вначале мы сделали большой прыжок вправо, потом прыжок поменьше влево. В результате мы так и остались справа от нуля. Но возможна и другая, менее привычная ситуация, как, например, в случае выражения

$$50 - 90:$$



На этот раз прыжок влево оказался длиннее прыжка вправо: мы перелетели через ноль и оказались в «подвале» — там, где находятся ступеньки с отрицательными номерами. Вглядимся попристальнее в наш прыжок влево. Всего мы преодолели 90 ступенек. После того как мы преодолели 50 ступенек, мы поравнялись с отметкой 0. Спрашивается сколько ступенек мы предолели после этого? Ну, конечно

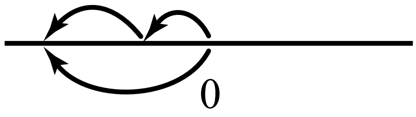
$$90 - 50 = 40.$$

Таким образом, оказавшись на ступеньке 0, мы спустились вниз еще на 40 ступенек, а значит, в конце концов мы пришли на ступеньку с номером -40. Итак,

$$50 - 90 = -(90 - 50) = -40.$$

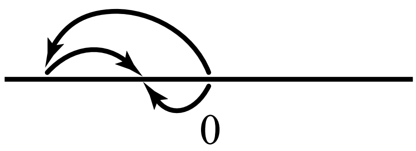
Подобным же образом, рисуя диаграммы, легко установить что

$$-40 - 50 = -(40 + 50) = -90;$$



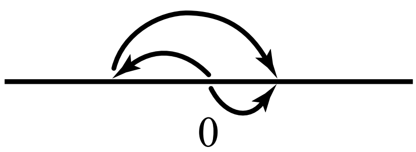
а также

$$-90 + 50 = -(90 - 50) = -40;$$



и, наконец,

$$-50 + 90 = 90 - 50 = 40.$$



Таким образом, мы научились свободно путешествовать по всей лестнице целых чисел.

Рассмотрим теперь такую задачу. Денис и Матвей обмениваются фантиками. Вначале Денис дал Матвею 3 фантика, а потом взял у него 5 фантиков. Сколько фантиков в итоге получил Матвей?

Для начала удобно рассчитать «прибыль» Дениса:

$$-3 + 5 = 2.$$

Но раз Денис получил 2 фантика, то Матвей получил -2 фантика. К прибыли Дениса мы приписали минус и получили прибыль Матвея. Наше решение можно записать в виде единственного выражения

$$-(-3 + 5) = -2.$$

Тут всё просто. Но давайте слегка видоизменим условие задачи. Пусть Денис дал сперва Матвею 5 фантиков, а потом взял у него 3 фантика. Спрашивается, опять-таки, сколько фантиков в итоге получил Матвей?

Снова вначале рассчитаем «прибыль» Дениса:

$$-5 + 3 = -2.$$

Значит, Матвей получил 2 фантика. Но как теперь наше решение записать в виде единственного выражения? Что бы такое приписать к отрицательному числу -2, чтобы получить положительное число 2? Оказывается, и на этот раз надо приписать знак минус. Математики очень любят единообразие. Они стремятся к тому, чтобы решение похожих задач записывались в виде похожих выражений. В данном случае решение выглядит так:

$$-(-5 + 3) = -(-2) = +2.$$

Так уж математики договорились: если к положительному числу приписать минус, то оно превращается в отрицательное, а если к отрицательному числу приписать минус, то оно превращается в положительное. Это очень логично. В конце концов, спуститься на минус две ступеньки вниз это то же самое, что подняться на плюс две ступеньки вверх. Итак,

$$-(+2) = -2;$$
$$-(-2) = +2.$$

Говорят, что число -2 противоположно числу $+2$, а число $+2$ противоположно числу -2. Таким образом, противоположные числа отличаются знаком, стоящим перед ними. Для полноты картины отметим еще, что

$$+(+2) = +2;$$
$$+(-2) = -2.$$

Это дает нам возможность по-новому взглянуть на давно привычные вещи. Пусть дано выражение

$$5 - 3.$$

Смысл этой записи можно представлять себе по-разному. Можно, как это мы делали раньше, представить себе, что у нас есть кучка из пяти конфет, из которых мы потом съедаем три. На научном языке это называется: мы применяем операцию вычитания к натуральным числам 5 и 3. Но теперь мы знаем, что точно такая же запись получается, если просто выписать рядом друг с другом целые числа $+5$ и -3, и это означает, что, прыгнув сперва от нуля на ступеньку номер 5, мы спускаемся потом на 3 ступеньки вниз. Спрашивается, какую арифметическую операцию мы при этом выполняем? Однозначного ответа на этот вопрос нет.

Вполне позволительно считать, что из положительного числа +5 отнимается положительное число $+3$:

$$(+5) - (+3).$$

В этом случае $+5$ называется *уменьшаемым*, $+3$ — вычитаемым, а всё выражение — *разностью*. Именно так учат в школе. Однако слова «уменьшаемое» и «вычитаемое» нигде, кроме школы, не употребляются, и их можно забыть после итоговой контрольной работы. Вместе с тем, про эту же самую запись можно сказать, что к положительному числу $+5$ прибавляется отрицательное число -3:

$$(+5) + (-3).$$

Числа $+5$ и -3 называются *слагаемыми*, а всё выражение — *суммой*. В данной сумме только два слагаемых, но, вообще, сумма может состоять из скольких угодно слагаемых. Подобным же образом, выражение

$$5 + 3$$

можно с одинаковым правом рассматривать как сумму двух положительных чисел:

$$(+5) + (+3),$$

и как разность положительного и отрицательного чисел:

$$(+5) - (-3).$$

После того как мы познакомились с целыми числами, нам обязательно надо уточнить правила раскрытия скобок. Если перед скобками стоит знак «+», то такие скобки можно просто стереть, и все числа в них сохраняют свои знаки, например:

$$+(+2) = +2;$$
$$+(-2) = -2;$$
$$+(-3+5) = -3+5;$$
$$+(-3-5) = -3+5;$$
$$+(5-3) = 5-3 \text{ и так далее.}$$

Если же перед скобками стоит знак «$-$», то стирая скобку, мы должны также поменять знаки у всех слагаемых, стоявших в ней:

$$-(+2) = -2;$$
$$-(-2) = +2;$$
$$-(-3+5) = +3-5 = 3-5;$$
$$-(-3-5) = +3+5 = 3+5;$$
$$-(5-3) = -(+5-3) = -5+3 \text{ и так далее.}$$

При этом полезно держать в голове задачу про обмен фантиками между Денисом и Матвеем. Например, последнюю строчку можно получить так. Считаем, что Денис вначале взял 5 фантиков у Матвея, а потом еще -3. Всего Денис получил $5-3$ фантиков, а Матвей — то же самое число, но с противоположным знаком, то есть $-(5-3)$ фантиков. Но ведь эту же задачу можно решить и другим способом, имея в виду, что всякий раз, когда Денис получает, Матвей отдает. Значит, вначале Матвей получил -5 фантиков, а потом еще $+3$, что в итоге дает $-5+3$.

Подобно натуральным числам, целые числа можно сравнивать между собой. Зададимся, например, вопросом: какое число больше: -3 или -1? Посмотрим на лестницу с целыми числами, и сразу станет ясно, что -1 больше, чем -3, и, значит, -3 меньше, чем -1:

$$-1 > -3;$$
$$-3 < -1.$$

А теперь давайте уточним: насколько -1 больше, чем -3? Иными словами, на сколько ступенек надо подняться, чтобы перейти со ступеньки -3 на ступеньку -1? Ответ на этот вопрос можно записать в виде разности чисел -1 и -3:

$$-1-(-3) = -1+3 = 3-1 = 2.$$

Прыгая по ступенькам, легко проверить, что это так. А вот еще один любопытный вопрос: насколько число 3 больше числа 5? Или, что то же самое: на сколько ступенек надо подняться вверх, чтобы перейти со ступеньки 5 на ступеньку 3? Еще недавно этот вопрос поставил бы нас в тупик. Но теперь мы легко можем выписать ответ:

$$3-5 = -2.$$

Действительно, если мы находимся на ступеньке 5 и поднимемся вверх еще на -2 ступеньки, то окажемся как раз на ступеньке 3.

Конспект

1. *Натуральные числа* — это

$$1, 2, 3, \ldots$$

Целые числа — это

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$$

Числа со знаком «$+$» называются *положительными*, числа со знаком «$-$» называются *отрицательными*. Знак «$+$» перед положительным числом может быть опущен. Целые положительные числа — это то же самое, что и натуральные числа.

2. Целые числа удобно представлять себе как номера ступенек лестницы. Лестничная площадка, расположенная вровень с землей, имеет номер 0. Ступеньки, ведущие от нуля наверх, нумеруются положительными числами. Ступеньки, ведущие вниз, — отрицательными. По-другому целые числа можно представлять себе как команды, задающие прыжки по лестнице: $+3$ — это прыжок на три ступеньки вверх, -5 — это прыжок на пять ступенек вниз. Номер ступеньки совпадает с такой командой, которая перемещает нас на эту ступеньку, если начинать движение с нуля.

3. Целые числа, выписанные подряд, задают скачки, следующие друг за другом. Например, запись $-5+9$ означает, что мы прыгнули сначала от нуля на 5 ступенек вниз, а потом поднялись на 9 ступенек вверх. Равенство $-5+9=4$ означает, что в результате этих прыжков мы оказались на ступеньке номер 4.

4. Если приписать перед числом знак «$-$», то оно превращается *в противоположное*:

$$-(+2) = -2, \quad -(-2) = +2.$$

Если приписать перед числом знак «$+$», то оно не изменится:

$$+(+2) = +2, \quad +(-2) = -2.$$

Фразы, содержащие отрицательные числа меняют свой смысл на противоположный. «Подняться за -2 ступеньки вверх» означает «спуститься за (плюс) 2 ступеньки вниз». «Спуститься за -2 ступеньки вниз» означает «Подняться за (плюс) 2 ступеньки вверх».

5. Когда мы имеем дело с целыми числами, одно и то же действие можно представить как в виде сложения, так и в виде вычитания.

Сложение:	$(+5)+(-3)=5-3=2;$
оно же вычитание:	$(+5)-(+3)=5-3=2.$

Сложение:	$(+5)+(+3)=5+3=8;$
оно же вычитание:	$(+5)-(-3)=5+3=8.$

Между сложением и вычитанием часто не делают различий, называя и то, и другое сложением, имея в виду, что каждое из слагаемых может быть как положительным, так и отрицательным.

6. Правило раскрытия скобок: если перед скобкой стоит знак «$+$», то скобку можно стереть, оставив ее содержимое без изменений:

$$+(-3+5) = -3+5$$

если перед скобкой стоит знак «$-$», то, стирая ее, мы должны поменять знаки перед всеми слагаемыми, входящими в скобку:

$$-(-3+5) = +3-5.$$

7. Целые числа можно сравнивать между собой, например: $-1 > -3$ и $-3 < -1$. Чтобы узнать, насколько -1 больше, чем -3, надо из числа -1 вычесть число -3:

$$(-1)-(-3) = 2.$$

Это значит, что, для того чтобы со ступеньки -3 перемеситься на ступеньку -1, надо подняться на 2 ступеньки вверх.

Задачи

2.3.1. Какой смысл имеют следующие фразы?

— Денис дал папе минус три конфеты.

— Матвей старше Дениса на минус два года.

— Чтобы попасть в нашу квартиру, надо спуститься на минус два этажа вниз.

И т. п.

2.3.2. Имеют ли смысл такие фразы?

— У Дениса минус три конфеты.

— На лугу пасется минус две коровы.

Замечание. Эта задача не имеет однозначного решения. Не будет, конечно, ошибкой утверждать, что данные высказывания бессмысленны. И в то же время им можно придать вполне ясный смысл. Допустим, у Дениса есть большая коробка, доверху наполненная конфетами, но содержимое этой коробки — не в счет. Или допустим, что две коровы из стада не вышли пастись на луг, а по какой-то причине остались в коровнике. Стоит иметь в виду, что и самые привычные фразы могут оказаться неоднозначными:

— У Дениса три конфеты.

Это высказывание не исключает, что у Дениса припрятана где-то еще огромная коробка с конфетами, но о тех конфетах просто умалчивается. Точно так же, когда я говорю: «У меня пять рублей», — я не имею в виду, что это и есть всё мое состояние.

2.3.3. Кузнечик прыгает по лестнице, начиная с этажа, где находится квартира Дениса. Сначала он прыгнул на 2 ступеньки вниз, потом на 5 ступенек вверх, и наконец на 7 ступенек вниз. На сколько ступенек и в каком направлении переместился кузнечик?

2.3.4. Найти значения выражений:

$-6 + 10;$

$-28 + 76$ и т. п.

Образец:

$-6 + 10 = 10 - 6 = 4.$

2.3.5. Найти значения выражений:

$8 - 20;$

$34 - 98$ и т. п.

Образец:

$8 - 20 = -(20 - 8) = -12.$

2.3.6. Найти значения выражений:

$-4 - 13;$

$-48 - 53$ и т. п.

Образец:

$-4 - 13 = -(4 + 13) = -17.$

2.3.7. Для следующих выражений найти значения, проводя вычисления в том порядке, который задается скобками. Затем раскрыть скобки и убедиться, что значения выражений остались прежними. Составить задачи про конфеты, которые решаются таким образом.

$25 - (-10 + 4);$

$25 + (-4 + 10)$ и т. п.

Образец:

$$25 - (-10 + 4) = 25 - (-(10 - 4)) = 25 - (-6) = 25 + 6 = 31.$$
$$25 - (-10 + 4) = 25 + 10 - 4 = 35 - 4 = 31.$$

«У Дениса было 25 конфет. Он отдал папе минус десять конфет, а Матвею четыре конфеты. Сколько конфет у него стало?»

2.4. Переменные

Рассмотрим такую задачу: «Денис старше Матвея на 2 года. Сколько лет будет Денису, когда Матвею будет 10 лет?» Решить ее можно следующим образом:

$$10 + 2 = 12.$$

А интересно, сколько лет будет Денису, когда Матвею будет 11 лет? Решение в этом случае выглядит так:

$$11 + 2 = 13.$$

А если Матвею будет 12 лет? — Тогда так:

$$12 + 2 = 14.$$

Спрашивается, нельзя ли как-нибудь на все подобные вопросы ответить раз и навсегда в виде какого-нибудь правила? Оказывается можно:

(*возраст Дениса*) = (*возраст Матвея*) + 2.

Правила, записанные в виде равенств, называются *формулами*. Математикам очень часто приходится исписывать целые страницы разными равенствами и формулами, поэтому они стремятся делать их, по возможности, краткими. Математик предпочел бы написать следующим образом:

$$Д = М + 2,$$

а потом отдельно пояснить, что $Д$ означает возраст Дениса, а $М$ — возраст Матвея. Но и это не принесло бы ему полного удовлетворения. Математики предпочитают пользоваться буквами самого распространенного в мире алфавита — латинского. Вот запись, которая удовлетворила бы математика полностью:

$$d = m + 2.$$

Разумеется, как и ранее, к этой формуле необходимо еще приложить пояснения, что d — это возраст Дениса, а m — это возраст Матвея.

Итак, скажите мне, сколько лет Матвею, — и, глядя на эту формулу, я вам быстро отвечу, сколько лет Денису. Принято говорить: если m принимает значение 10, то d принимает значение 12. Или: если $m = 10$, то $d = 12$. Буквы, которые входят в математические выражения и которые могут принимать разные численные значения, называются *переменными*.

Мы уже довольно давно занимаемся математикой и успели за это время сделать кое-какие важные математические открытия. С помощью формул мы можем теперь эти открытия грамотно записать. Например, мы однажды заметили, что если поменять местами слагаемые, то значение суммы не изменится. В виде формулы это записывается следующим образом:

$$a + b = b + a,$$

где a и b — любые числа. Школьные учителя называют это «переместительным свойством сложения». Лично мне такое словосочетание режет слух. Это примерно то же самое, что сказать: «оранжевое свойство апельсина». Переместительным является, конечно, не свойство, а само сложение. А профессиональные математики используют тут и вовсе другое слово. Они говорят: сложение *коммутативно*.

Равенства, которые остаются верными при любых значениях входящих в них переменных, называются *тождествами*. Вот еще пример тождества:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

или, что то же самое,

$$a + (b + c) = a + b + c.$$

Это знакомое нам правило, по которому можно изменять порядок действий, или, как мы еще говорили, раскрывать скобки. У школьных учителей это называется «сочетательным свойством сложения». Грамотные же люди говорят: сложение *ассоциативно*.

Но, разумеется, не всякое равенство является тождеством. Зададимся вопросом: коммутативно ли вычитание? Можно ли написать так:

$$a - b = b - a?$$

Ну, написать-то так, пожалуй, можно: бумага, говорят, все вытерпит. Но вычитание, конечно же, некоммутативно, а значит, данное равенство не является тождеством. Убедиться в этом очень просто. Пусть, например, $a = 2$ и $b = 1$. Подставляем эти значения в равенство и получаем: $2 - 1 = 1 - 2$. Ерунда какая-то! Но, с другой стороны, пусть $a = 5$ и $b = 5$. В этом случае равенство принимает вид: $5 - 5 = 5 - 5$. Ну, что ж, спорить нечего, так оно и есть. Равенство, которые становятся верными лишь при некоторых значениях переменных, называются *уравнениями*.

Уравнениями очень удобно пользоваться при решении всевозможных математических задач. Вернемся к задаче про Дениса и Матвея: «Денис старше Матвея на 2 года. Каков будет возраст Дениса, d, когда Матвею будет m лет?» Мы твердо знаем, что Денис всегда останется старше Матвея на одно и то же число лет. Поэтому мы можем составить следующее уравнение:

$$d - m = 2.$$

Здесь две переменные, а именно d и m. Следует отметить, что роль этих переменных неодинакова. Предполагается, что численное значение переменной m нам известно. Если даже мы не знаем этого значения сейчас, то, вероятно, нам назовут его когда-нибудь потом. И уж, во всяком случае, его нахождение не входит в нашу задачу. Такие переменные называются *параметрами*. В противоположность этому, о численном значении переменной d нам никто никогда не собирается сообщать. Наша задача как раз и заключается в том, чтобы его найти. Такие переменные называются *неизвестными*.

Решить уравнение — это значит выписать формулу, по которой можно вычислить значение неизвестной, если нам скажут численное значение параметра. В данном случае решение — это

$$d = m + 2.$$

Давайте посмотрим, как мы пришли от исходного уравнения

$$d - m = 2.$$

к его решению. Ну, мы пристально посмотрели на уравнение, что-то прикинули в уме и выписали результат. Так делать, конечно, можно. Однако в математике разработаны особые методы, которые позволяют решать уравнения без особенного умственного напряжения. Тут очень удобно воспользоваться одним простеньким приемом.

Но сперва — небольшое отступление. Допустим, у Дениса в брюках есть два кармана, один слева, другой справа. В этих карманах лежат конфеты. Точное количество конфет нам неизвестно, но мы знаем, что в левом и правом карманах конфет поровну. Введем обозначения. Пусть L — это число конфет в левом кармане, а P — это число конфет в правом кармане. На основе имеющихся у нас сведений, мы можем составить уравнение:

$$L = P.$$

Далее события развиваются так. Денис положил в левый карман еще одну конфету и в правый карман еще одну конфету. Ясно, что в обоих карманах конфет снова оказалось поровну:

$$L + 1 = P + 1.$$

А что было бы, если бы Денис положил в каждый карман не по одной конфете, а по двум или трем или десяти? Ну, наши рассуждения тогда не сильно бы изменились. Просто в новом уравнении вместо «1» мы написали бы «2» или «3» или «10». Рассмотрим ситуацию, как говорят математики, в общем виде. Пусть Денис положил в каждый карман по k конфет. В обоих карманах конфет как было, так и осталось поровну. Значит,

$$L + k = P + k.$$

Заметим, что параметр k может даже быть отрицательным (то есть Денис не кладет конфеты, а, наоборот, берет их).

Тут напрашивается очень важный вывод. Оказывается, что если у нас есть какое-то уравнение, то к обеим его частям можно одновременно прибавить одно и то же число, и тогда уравнение, по своей сути, не изменится. Если при каких-то значениях переменных первое уравнение обращается в верное равенство, то при тех же самых значениях переменных обратится в верное равенство и второе уравнение. И наоборот, если обратилось в верное равенство второе уравнение, то и с первым уравнением случилось то же самое. Иными словами, оба уравнения имеют одинаковые решения. Профессиональные математики в этом случае говорят, что уравнения *эквивалентны*.

Вернемся теперь к задаче про возраст Дениса и Матвея. Мы получили уравнение

$$d - m = 2.$$

Давайте *преобразуем* это уравнение, прибавив к обеим его частям параметр m:

$$d - m + m = 2 + m.$$

После очевидных упрощений новое уравнение принимает вид:

$$d = m + 2.$$

Вот и всё! Решение получено.

Рассмотрим теперь другую, но очень похожую задачу, в которой вопрос поставлен несколько по-другому: «Денис старше Матвея на 2 года. Каков будет возраст Матвея, m, когда Денису будет d лет?» Уравнение, которое можно составить по этому условию, оказывается по виду точно таким же, как и прежде:

$$d - m = 2.$$

Однако, на этот раз переменная d является параметром, а переменная m — неизвестной. В таких случаях еще говорят, что уравнение требуется решить относительно переменной m. Такое решение находится лишь ненамного труднее предыдущего. Приобразуем уравнение, прибавив к обеим его частям вначале m, а потом (-2):

$$d - m + m - 2 = 2 + m - 2.$$

После упрощений получаем:

$$d - 2 = m.$$

Тут стоит обратить внимание вот на что. В исходном уравнении переменная m была в левой части, и перед ней стоял знак минус. В конечном уравнении эта же переменная находится в правой части, и подразумевается, что перед ней стоит знак плюс. Говорят, что слагаемые в уравнениях можно переносить из одной части в другую с противоположным знаком (то есть минус следует менять на плюс, а плюс — на минус). В данном случае, справедливость этого правила можно также проследить на числе 2. Вначале двойка стояла справа, и перед ней подразумевался знак плюс. А в конце она оказалась слева со знаком минус.

Теперь вспомним о задаче, которую мы решаем. В полученном уравнении осталось только поменять местами левую и правую часть — и ответ готов:

$$m = d - 2.$$

После того, как уравнение решено, полезно сделать так называемую проверку, то есть подставить найденное решение в исходное уравнение и посмотреть, что получится. Например, в данном случае, в исходном уравнении,

$$d - m = 2,$$

надо m заменить на $(d - 2)$:

$$d - (d - 2) = 2.$$

И что же получилось? Ну, конечно, тождество! Если бы мы не получили тождества, это бы означало, что уравнение решено неверно.

Подобные же рассуждения применимы и к неравенствам. Рассмотрим, для примера, такую задачу. Сколько лет должно пройти, чтобы Матвею можно было официально смотреть фильмы для взрослых? Поскольку человек считается взрослым с 18 лет, мы должны записать:

$$m + x \geqslant 18,$$

где m обозначает нынешний возраст Матвея, а x — это число лет, которые ему надо подождать, чтобы его стали пускать в кинотеатр на сеансы для взрослых. Значок «$\geqslant$» у математиков заменяет слова *больше или равно*. Ясно, что если прибавить (или отнять) от обеих частей неравенства одно и то же число, то оно останется по сути тем же самым. Или, говоря точнее, оно превратится в эквивалентное неравенство, которое имеет в точности то же самое решение, что и первоначальное. Отнимаем от обеих частей нашего неравенства число m и получаем:

$$x \geqslant 18 - m.$$

Если Матвею сейчас, допустим, 12 лет, то

$$x \geqslant 18 - m = 18 - 12 = 6,$$

или, окончательно:

$$x \geqslant 6.$$

Таким образом, для того чтобы Матвей мог официально смотреть фильмы для взрослых, должно пройти 6 лет или больше.

Точно так же, нам может приготиться понятие *меньше или равно*, которые обозначается значком «$\leqslant$». Допустим, мы в составе группы из a человек дожидаемся лифта в многоэтажном доме. Грузоподъемность лифта ограничена 12 человеками, но, когда он подойдет, может оказаться, что в нем уже есть x человек. Спрашивается, каково должно быть значение x, чтобы вся наша группа зараз поместилась в лифте? Записываем:

$$a + x \leqslant 12,$$

и, применив наш обычный трюк, получаем:

$$x \leqslant 12 - a.$$

Отметим заодно, что вся эта задача имеет смысл, только если численность нашей группы меньше или равна 12 человек:

$$a \leqslant 12.$$

Посмотрим теперь, как ведут себя переменные в примерах на умножение и деление. Пусть требуется найти неизвестную переменную x в уравнении:

$$x/3 = 4.$$

По условию нашей задачи, $x/3$ и 4 — это одно и то же число, просто записанное двумя разными способами. Умножим-ка мы это число на 3. И результат тоже запишем по-разному:

$$(x/3) \cdot 3 = 4 \cdot 3.$$

Здесь деление и умножение на тройку, конечно же, взаимно отменяют друг друга. С учетом этого получаем:

$$x = 12.$$

Решение уравнения найдено.

А теперь, пусть дано такое уравнение (опять-таки относительно x):

$$5 \cdot x = 20.$$

Сможем ли мы его решить? Разумеется, сможем. Только вначале — небольшое замечание. Знак умножения «$\cdot$» перед переменной ставить не принято. Когда мы берем переменную x пять раз, то мы пишем просто $5x$, точно также как мы пишем 5 карандашей или 5 копеек. Поэтому наше уравнение следует переписать так:

$$5x = 20.$$

После деления обеих частей на 5 получаем:

$$x = 4.$$

А как насчет такого уравнения?

$$21/x = 3.$$

Это уравнение решается в два действия. Вначале умножаем обе его части на x:

$$21 = 3 \cdot x.$$

А потом делим на 3:

$$7 = x.$$

Теперь остается только для большей красоты поменять местами левую и правую части этого равенства:

$$x = 7,$$

и решение окончательно готово.

Если после всего этого нам встретится неравенство с неизвестным, такое, например, как

$$2 \cdot x > 10,$$

то мы, конечно, не растеряемся и тоже сможем легко найти его решение

$$x > 10/2,$$

потому что оно находится с помощью всё тех же самых трюков, что и в случае уравнений. Впрочем, тут надо сделать одну важную оговорку. Хотя мы уже и познакомились с отрицательными числами, умножением и делением на них мы пока еще не занимались. Покуда мы делим и умножаем только на положительные числа, все рассмотренные тут трюки прекрасно работают в одинаковой степени как для равенств, так и для неравенств. Но когда мы перейдем к умножению и делению на отрицательные числа, тогда у неравенств обнаружатся кое-какие особенности, о которых мы будем еще говорить отдельно. Что же касается умножения и деления на ноль, то, как мы знаем, делить на ноль вообще нельзя, а умножать на ноль обе части равенств или неравенств не имеет смысла, потому что при умножении любого числа на ноль получается ноль. Если в обеих частях уравнения или неравенства у нас окажутся нули, то толку от этого ровным счетом никакого не будет.

Конспект

1. Рассмотрим задачу:

> Денис старше Матвея на два года. Найти возраст Дениса, если известен возраст Матвея.

Ее условие можно переписать в виде *уравнения*

$$d - m = 2,$$

где d — это *переменная*, означающая возраст Дениса, а m — *переменная*, означающая возраст Матвея. Считается, что *значение* переменной m нам известно. Такая переменная называется *параметром*. Напротив, значение переменной d требуется найти. Такая переменная называется *неизвестной*. Чтобы ответить на вопрос задачи, *решаем уравнение относительно переменной* d и получаем *формулу*

$$d = m + 2,$$

позволяющую рассчитать возраст Дениса, если дан возраст Матвея. Пусть, например Матвею 10 лет. Подставляем 10 в формулу вместо m и получаем

$d = 10 + 2 = 12$ — столько лет Денису.

2. Свойства сложения, записанные в виде формул:

$a + b = b + a$ — *переместительное* (*коммутативность*);

$a + (b + c) = (a + b) + c$ — *сочетательное* (*ассоциативность*).

Эти равенства являются *тождествами*: они верны при любых значениях переменных.

3. В отличие от тождеств, уравнения — это равенства, которые становятся верны только при некоторых значениях переменных. Решить уравнение относительно входящей в него переменной x — это значит найти такое значение x, при котором уравнение обращается в верное равенство. Уравнения решаются с помощью *преобразований*, позволяющие получать более простые, но *эквивалентные* уравнения (то есть уравнения с теми же самыми решениями). Правила преобразований: (1) к обеим частям уравнения можно прибавлять одно и то же число (в том числе отрицательное), (2) обе части можно умножать или делить на одно и то же число (пока только натуральное). Следствие правила (1): слагаемые

можно переносить из одной части уравнения в другое с противоположным знаком.

4. Неравенства также могут содержать неизвестную переменную. Они решаются с помощью таких же преобразований, как и уравнения.

Задачи

2.4.1. Определить, какие из следующих равенств являются тождествами, а какие — уравнениями. Особо отметить уравнения, не имеющие решений (то есть такие равенства, которые не становятся верными ни при каких значениях переменных).

$x - y = 5;$

$x - 5 = 5;$

$-(-x) = x;$

$-(-x) = -x;$

$-(x - y) = -(y - x);$

$-(x - y) = y - x;$

$x + 2 = x;$

$x - (y + z) = x - y - z;$

$x - 2 = x.$

2.4.2. Для каждого выражения из левого столбца найти тождественное выражение из правого столбца. (Два выражения называются *тождественными*, если при постановке между ними знака равенства получается тождество.)

$x;$	$-(x - 1);$
$1 - x;$	$-y + x;$
$x - x;$	$5 + x - 5;$
$x - y;$	$-y - x;$
$-(x + y);$	$3 - 3.$

2.4.3. Раскрыть скобки:

$a + (b + c);$

$a - (b + c);$

$a + (b - c);$

$a - (b - c);$

$a + (-b + c);$

$a - (-b + c);$

$a + (-b - c);$

$a - (-b - c).$

2.4.4. Для каждого уравнения из левого столбца подобрать эквивалентное ему уравнение из правого столбца.

$x - y = 0;$	$1 = y;$
$x - 3 = y;$	$y = x;$
$x - y = -y - x;$	$x - y + 1 = 4;$
$1 - x = y - x;$	$x + x = 0.$

2.4.5. Решить уравнения и сделать проверку (x — неизвестная, a — параметр):

$x + 531 = 273;$

$x - 531 = 273;$

$344 - x = 118;$

$a - x = 37;$

$a - x = a;$

и т. п.

2.4.6. Старшему брату a лет, а младшему брату b лет. Каков будет возраст старшего брата, x, когда младшему будет y лет? Решить задачу в общем виде и получить численный ответ при следующих значениях параметров: $a = 11$, $b = 5$, $y = 18$. Каков будет возраст младшего брата, у, когда старшему будет x лет? Дать ответ в общем виде и получить его численное значение при $a = 11$, $b = 5$, $x = 18$.

2.4.7. Один брат старше другого на a лет. Через b лет старшему брату будет c лет. Найти нынешний возраст старшего брата, x, и младшего брата, y. Вычислить ответ при $a = 3$, $b = 10$, $c = 25$.

2.4.8. У Дениса было какое-то количество конфет, и у Матвея было какое-то количество конфет. После того как Денис дал Матвею a конфет, у них стало конфет поровну. На сколько конфет было у Дениса больше первоначально? Вычислить ответ при $a = 3$.

2.5. Простейшие «текстовые» задачи

Изложенной до сих пор «теории», в принципе, достаточно, чтобы приступать к решению простейших «текстовых» задач школьного типа (разве что ребенок может попросить объяснить ему значение того или иного слова). Однако на практике для этого нужно знать еще кое-какие «тонкости». Вот об этих «тонкостях» и пойдет теперь речь.

Решение математических задач подобно переводу с одного языка на другой, например, с английского на русский. Техника перевода состоит в том, чтобы прочитав английский текст, живо представить себе описываемую «картинку», а потом описать ту же самую картинку по-русски. Решая математические задачи, мы переводим обычный человеческий язык в язык математических символов. Поскольку в данном случае речь идет о задачах в одно-два действия, от нас требуется перевести условие в простые примеры на сложение, вычитание, умножение или деление. Однако обязательным промежуточным этапом, опять-таки, являются «картинки». Если «картинок» не делать, а подходить к решению чисто формально, то результаты во многих случаях будут весьма плачевны (как плачевен машинный перевод с английского на русский).

Итак, приступим.

Задачи в одно действие на сложение и вычитание

Задача 2.5.1a. Денис просит маму:

— Дай мне, пожалуйста, 2 рубля.

— На что тебе эти деньги? — интересуется мама.

— Я хочу купить шоколадку.

— Разве можно купить шоколадку за 2 рубля?

— А у меня уже есть 18 рублей. Я добавлю твои деньги и мне как раз хватит, чтобы купить шоколадку.

Сколько стоит шоколадка?

Эта задача очень простая. Потому я сейчас не буду здесь приводить ее решения, а сразу перейду к следующей.

Задача 2.5.1b. Денис просит маму:

— Дай мне, пожалуйста, 2 рубля.

— На что тебе эти деньги? — интересуется мама.

— Я хочу купить 100 шоколадок.

— Разве можно купить 100 шоколадок на 2 рубля?

— Нет, но у меня уже есть деньги на 99 шоколадок, и даже еще 18 рублей останется. Я добавлю твои деньги, и мне как раз хватит на 100 шоколадок.

Сколько стоит одна шоколадка?

На первый взгляд, вторая задача может показаться сложнее первой. Но на самом деле, это абсолютно та же самая задача, просто сформулирована она слегка позаковыристей. Значит, решается она точно так же, и имеет точно такой же ответ:

$$18 \text{ рублей } + 2 \text{ рубля } = 20 \text{ рублей}.$$

Очень часто в условие задачи помещают «лишнюю» информацию, чтобы сбить с толку неопытного ученика. На первых порах, приходится помогать ребенку отсеивать информационную «шелуху».

Задача 2.5.2a. Вася называет подряд все натуральные числа, начиная с числа 5 и заканчивая числом 10. Сколько всего чисел он назовет?

Вот эти числа:

$$5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10.$$

Пересчитываем и получаем ответ: 6 чисел.

Задача 2.5.2b. Вася называет подряд все натуральные числа, начиная с числа 1 и заканчивая числом 384. Сколько всего чисел он назовет?

На этот раз, как-то неохота выписывать все числа. Выпишем несколько первых и несколько последних:

$$1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 383,\ 384.$$

Пересчитать все числа на этот раз мы не сможем, но и без того достаточно очевидно, что всего тут должно стоять 384 чисел. Задача решена.

Задача 2.5.2c. Вася называет подряд все натуральные числа, начиная с числа 245 и заканчивая числом 384. Сколько всего чисел он назовет?

Начнем опять с того, что выпишем несколько первых и несколько последних чисел:

$$245,\ 246,\ 247,\ \dots,\ 383,\ 384.$$

Однако на этот раз ответ неочевиден. Значит, надо применить какой-то «трюк». Допустим, Вася «по ошибке» стал называть числа, начиная не с числа 245, а с числа 1:

$$1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 383,\ 384 \text{ — всего } 384 \text{ числа}.$$

Из них следующие числа названы «по ошибке»:

$$1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 243,\ 244 \text{ — всего } 244 \text{ числа}.$$

Значит, количество чисел, названных правильно, равно

$$384 - 244 = 140.$$

Задача решена.

Задача 2.5.2d. Вася называет подряд все целые числа, начиная с числа (-123) и заканчивая числом 321. Сколько всего чисел он назовет?

Понятно, что Вася вначале назовет отрицательные числа:

$$-123,\ -122,\ -121,\ \dots,\ -2,\ -1 \text{ — всего } 123 \text{ отрицательных числа};$$

затем

$$0 \text{ — одно число};$$

и, наконец, положительные числа:

$$1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 321 \text{ — всего } 321 \text{ положительное число}.$$

Всех чисел вместе взятых будет названо:

$$123 + 1 + 321 = 445.$$

Задача решена.

Задачи такого типа могут быть сформулированы и более «научно». Например,

Задача 2.5.3a. Сколько существует таких натуральных чисел x, для которых выполняется двойное неравенство

$$5 \leqslant x \leqslant 10?$$

Символ «$\leqslant$» означает «меньше или равно», однако эту запись принято читать так: «x больше или равен пяти и меньше или равен десяти». Короче говоря, x может быть любым из следующих чисел:

$$5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10.$$

Задача заключается в том, чтобы посчитать количество чисел в данном ряду. Подобные задачи мы решать, конечно, уже умеем.

Задача 2.5.3b. Сколько существует таких натуральных чисел x, для которых выполняется двойное неравенство

$$5 < x < 10?$$

Здесь всё очень похоже, только на этот раз вместо символа «$\leqslant$» («меньше или равно») стоит более привычный нам символ «<» (просто «меньше»): x больше пяти, но меньше десяти. Значит, на этот раз x может принимать значения:

$$6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Задача 2.5.3c. Сколько существует таких натуральных чисел x, для которых выполняется двойное неравенство

$$5 \leqslant x < 10?$$

В этой задаче x может быть равен 5, но не может быть равен 10. Возможные значения x таковы:

$$5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Настало время сделать небольшое обобщение. Пусть ряд целых чисел начинается с числа a и заканчивается числом b:

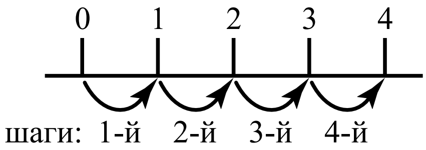
$$a,\ a+1,\ a+2,\ \dots,\ b-1,\ b.$$

Числа a и b необязательно положительны, однако подразумевается, что $a \leqslant b$. Тогда число чисел в этом ряду равно

$$b - (a-1) = b - a + 1.$$

Задача 2.5.4a. Я вбил в землю колышек и прикрепил к нему табличку с надписью «0». Затем я сделал один шаг вдоль по тропинке и после этого вбил в землю еще один колышек, снова прикрепил к нему табличку, но на этот раз написал на ней число «1». Так я продолжал шагать, вбивать колышки и прикреплять к ним таблички, на которых указывал количество проделанных шагов. Всего я вбил 5 колышков. Сколько я сделал шагов?

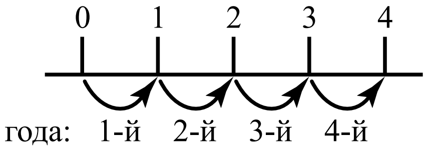
Если над этой задачей не слишком задумываться, то можно, пожалуй, рассудить так: «Сколько колышков, столько и шагов. Раз 5 колышков, значит, 5 шагов». Однако легко убедиться, что это не так, сделав простой рисунок:



Здесь 5 колышков, но только 4 шага.

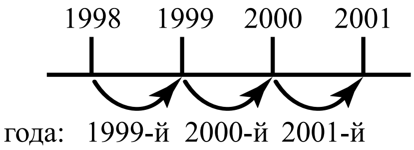
Задача 2.5.4b. У Маши сегодня день рождения. Ей пошел четвертый год. Сколько лет исполнилось Маше?

Это почти в точности такая же задача, как и предыдущая. И на этот раз нам поможет рисунок.



В тот день когда Маша появилась на свет, ей было ноль лет и пошел первый год. Когда же ей пошел четвертый год, ей исполнилось три года.

Задача 2.5.4c. Когда наступил 2000-й год, некоторые люди полагали, что настало третье тысячелетие. Сколько же в действительности к этому моменту прошло лет с начала нашего летоисчисления? В каком году началось третье тысячелетие?



И снова, эта задача — почти точное повторение предыдущей. Мы ведем наше летоисчисление от рождения Иисуса Христа. В тот день, когда Иисусу Христу пошел 2000-й год, ему исполнилось 1999 лет. Третье же тысячелетие началось (а второе закончилось), когда Иисусу Христу исполнилось 2000 лет, то есть тогда, когда наступил 2001-й год.

Задача 2.5.5a. Вдоль тропинки через каждый шаг вбиты колышки с табличками. На каждой табличке написан номер колышка. Денис вышел на тропинку у колышка номер 15, а свернул с тропинки у колышка номер 20. Сколько шагов он прошел по тропинке?

Предположим, что нумерация колышков начинается с нуля. Когда Денис выходил на тропинку, он был на расстоянии 15 шагов от колышка номер 0. Когда Денис сворачивал с тропинки, это расстояние увеличилось до 20 шагов. Значит, всего по тропинке он прошел

$$20 \text{ шагов } - 15 \text{ шагов } = 5 \text{ шагов.}$$

Задача 2.5.5b. Вдоль тропинки через каждый (человеческий) шаг вбиты колышки с табличками. На каждой табличке написан номер колышка. Улитка выползла на тропинку сразу перед колышком номер 15, а свернула с тропинки сразу перед колышком номер 20. Мимо скольких колышков проползла улитка?

Предположим, что нумерация колышков начинается с нуля. Когда улитка выползла на тропинку, позади нее было 15 колышков (см. задачу 10.4.a), а когда она сворачивала с тропинки, позади нее было 20 колышков. Значит, ей повстречалось

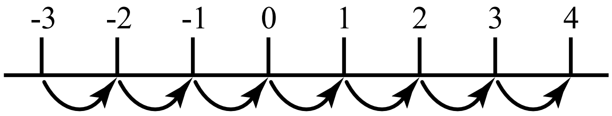
$$20 \text{ колышков } - 15 \text{ колышков } = 5 \text{ колышков }.$$

Задача 2.5.5c. Царь Горох взошел на престол в 1015 году и окончил царствовать в 1020 году. Сколько лет сидел на престоле царь Горох?

Строго говоря, мы не можем в точности вычислить, сколько лет сидел на престоле царь Горох, потому что ответ зависит от того, в начале или в конце 1015-го года он сел на престол, а также в начале или в конце 1020-го года закончилось его царствование. Однако мы можем выяснить, сколько раз царь Горох встречал Новый год, сидя на троне. Эта задача очень похожа на предыдущую. Каждая встреча Нового года подобна колышку, на котором написано, какой год только что закончился. Царь Горох начал царствовать перед колышком номер 1015, а закончил царствовать перед колышком номер 1020. Всего он встретил

1020 колышков $-$ 1015 колышков $=$ 5 колышков (Новых годов).

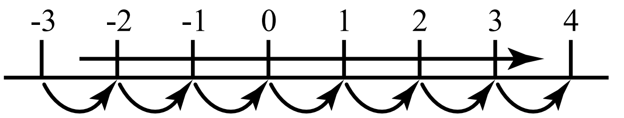
Задача 2.5.6a. Вдоль тропинки через каждый шаг вбиты колышки с табличками. На одном из колышков поставлен номер 0. Все колышки по одну сторону от него пронумерованы положительными числами. Все колышки по другую сторону пронумерованы отрицательными числами. Сколько шагов между колышком номер -3 и колышком номер $+4$?



От колышка -3 до колышка 0 — три шага, а от колышка 0 до колышка $+4$ — четыре шага. Всего шагов

3 шага $+$ 4 шага $=$ 7 шагов .

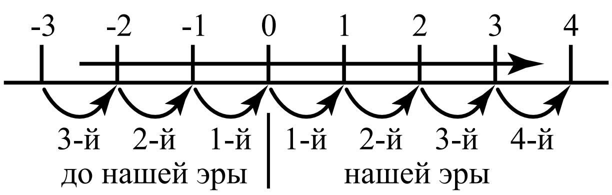
Задача 2.5.6b. По тропинке из предыдущей задачи проползла улитка. Она выползла на тропинку сразу после колышка -3, а свернула с тропинки сразу перед колышком $+4$. Сколько колышков повстречала улитка на своем пути?



Первым улитке повстречался колышек $(-3+1) = -2$, а последним — колышек $(+4-1) = +3$. Значит, она повстречала 2 колышка с отрицательными номерами, 1 колышек с номером 0 и 3 колышка с положительными номерами. Всего колышков

$2+1+3=6.$

Задача 2.5.6c. Царь Горох начал царствовать в 3-м году до нашей эры, а закончил — в 4-м году нашей эры. Сколько лет царствовал царь Горох? (Точнее, сколько раз он встречал Новый год, сидя на троне?)



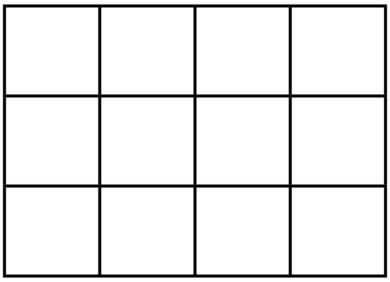
Эта задача решается точно так же, как и предыдущая:

$(3-1)+1+(4-1)=6.$

Царь Горох просидел на троне 6 лет. (Точнее, он встречал Новый год 6 раз.)

Задачи в одно действие на умножение и деление

Задача 2.5.7a. На листе бумаги начерчена таблица. В ней 3 строки и 4 столбца. Сколько в таблице ячеек?



Тут всё, конечно, очень просто. Можно сразу выписывать ответ:

$3 \cdot 4 = 12.$

Эта задача, однако, примечательна тем, что к ней сводятся другие задачи, которые на первый взгляд кажутся более сложными.

Задача 2.5.7b. Вычислить площадь прямоугольника со сторонами 3 сантиметра и 4 сантиметра.

Мысленно нарисуем таблицу в которой 3 строки и 4 столбца, так чтобы высота каждой строки была равна одному сантиметру и ширина каждого столбца была равна одному сантиметру. Это и есть наш прямоугольник. Одна ячейка таблицы представляет собой квадрат со стороной один сантиметр. Таким образом, площать ячейки равна одному квадратному сантиметру. Сколько таких ячеек, столько и квадратных сантиметров в прямоугольнике. Значит, площадь прямоугольника равна

$3 \cdot 4 = 12$ (квадратных сантиметров).

Задача 2.5.7c. У клоуна в гардеробе имеется 3 носка на правую ногу: красный, оранжевый, и желтый — и 4 носка на левую ногу: зеленый, голубой, синий и фиолетовый. Сколькими разными способами он может составить одну пару носков?

Мысленно рисуем таблицу, в которую заносим все варианты.

Красный–Зеленый	Красный–Голубой	Красный–Синий	Красный–Фиолетовый
Оранжевый–Зеленый	Оранжевый–Голубой	Оранжевый–Синий	Оранжевый–Фиолетовый
Желтый–Зеленый	Желтый–Голубой	Желтый–Синий	Желтый–Фиолетовый

В этой таблице $3 \cdot 4 = 12$ ячеек, а значит клоун может составить одну пару носков 12 способами.

Задача 2.5.8a. В одной коробке лежит 5 шоколадок. Сколько шоколадок в 7 таких коробках?

Ответ очевиден:

$7 \cdot 5 = 35.$

Задача 2.5.8b. Для того чтобы проползти один метр, черепахе требуется 5 минут. За сколько минут она проползет 7 метров?

Представим себе, что один метр — это коробка, в которой, наподобие шоколадок, уложены 5 минут. У нас 7 таких коробок, а значит, всего

$$7 \cdot 5 = 35$$

шоколадок — то есть, конечно, не шоколадок, а минут.

Задача 2.5.8c. Ваня за один час проходит 5 километров. Сколько километров он пройдет за 7 часов?

На этот раз час — это коробка, в которую упакованы километры. Их число находим как обычно:

$$7 \cdot 5 = 35.$$

Задачи в несколько действий

Задача 2.5.9a. У Маши и Миши вместе 10 конфет. Если бы у Маши было на 4 конфеты меньше, то конфет у них было бы поровну. Сколько конфет у каждого по отдельности?

Если бы у Маши было бы на 4 конфеты меньше, то всего у них было бы

$$10 - 4 = 6 \text{ (конфет)},$$

а у каждого по отдельности

$$6 / 2 = 3 \text{ (конфеты)}.$$

Именно столько сейчас конфет у Миши. А у Маши сейчас

$$3 + 4 = 7 \text{ (конфет)}.$$

Задача 2.5.9b. Сумма двух чисел равна 10, а их разность равна 4. Что это за числа?

По сути, это та же задача, что и предыдущая. Если бы большее число было на 4 меньше, чем оно есть на самом деле, то оно бы было равно меньшему, а их сумма равнялась

$$10 - 4 = 6.$$

Отсюда меньшее число равно

$$6 / 2 = 3,$$

а большее —

$$3 + 4 = 7.$$

Задача 2.5.9c. Сумма трех чисел равна 10. Второе число на 4 больше первого, а третье число на 1 меньше второго. Что это за числа?

Сперва заметим, что третье число на

$$4 - 1 = 3$$

больше первого. После этого задача становится очень похожей на две предыдущие. Если бы второе число было бы на 4 меньше, чем оно есть на самом деле, а третье — на 3, то их сумма была бы равна

$$10 - 4 - 3 = 3.$$

Значит, первое число равно

$$3 / 3 = 1,$$

второе —

$$1 + 4 = 5,$$

а третье —

$$5 - 1 = 4.$$

Задача 2.5.10a. У Маши и Миши вместе 20 конфет, причем у Маши в 3 раза больше конфет, чем у Миши. Сколько конфет у каждого по отдельности?

Представим себе Мишины конфеты в виде одной кучки. Тогда у Маши — 3 таких кучки. Вместе у них

$$1 + 3 = 4$$

кучки. Значит одна кучка состоит из

$$20 / 4 = 5$$

конфет. Именно столько конфет у Миши. Значит, у Маши

$$3 \cdot 5 = 15$$

конфет.

Задача 2.5.10b. Периметр прямоугольника равен 40 см, причем его длина в 3 раза больше ширины. Найти длину и ширину этого прямоугольника.

В этой задаче главное — не испугаться незнакомого слова «периметр». Математики, вообще, любят называть всякими мудреными словами совершенно простые вещи. Периметр — это сумма длин всех сторон прямоугольника, то есть

$$\text{длина} + \text{ширина} + \text{длина} + \text{ширина}.$$

В этой задаче нам гораздо удобнее иметь дело с полупериметром, который, очевидно, равен

$$\text{длина} + \text{высота} = 40/2 = 20 \text{ (см)}.$$

После этого задача полностью свелась к предыдущей. Только в роли кучки конфет у нас тут выступает отрезок, равный ширине прямоугольника. В полупериметр укладывается

$$1 + 3 = 4$$

таких отрезков. Таким образом, ширина прямоугольника —

$$20 / 4 = 5 \text{ (см)}.$$

А его длина —

$$3 \cdot 5 = 15 \text{ (см)}.$$

Задача 2.5.10c. У Миши 12 конфет, а у Маши 8 конфет. Сколько конфет должен дать Миша Маше, чтобы у Маши стало в 3 раза больше конфет, чем у Миши?

Всего у Маши с Мишей

$$12 + 8 = 20$$

конфет на двоих. Из двух предыдущих задач мы знаем, что у Миши должно стать 5 конфет. Значит, он должен отдать Маше

$$12 - 5 = 7 \text{ (конфет)}.$$

Задача 2.5.11. Найти стороны треугольника, если известно, что длины первой и второй сторон составляют в сумме 3 см, первой и третьей — 4 см, а второй и третьей — 5 см.

Если сложить все числа, приведенные в условии, и в полученную сумму длина каждой из сторон будет входить дважды:

$$3 + 4 + 5 = 12 \text{ (см)}.$$

Разделив это число пополам, получим периметр, то есть суммарную длину всех сторон:

$$12/2 = 6 \text{ (см)}.$$

Длина третьей стороны — это периметр минус суммарная длина двух первых сторон, то есть

$$6 - 3 = 3 \text{ (см)}.$$

Точно так же, длина второй стороны равна

$$6 - 4 = 2 \text{ (см)}.$$

Длина первой стороны —

$$6 - 5 = 1 \text{ (см)}.$$

2.6. От перемены мест слагаемых сумма не изменяется

Еще недавно, учась сложению чисел, мы складывали кучки из монет. Тогда перед нами стояла задачи сложить две кучки. Но допустим, мы хотим теперь сложить не две, а несколько кучек. Это можно было бы сделать так: сгребаем их все сразу в одну большую кучу и пересчитываем в ней все монеты. Такой способ сложения всем бы был хорош, да только ни на счетах, ни на бумаге нельзя сделать ничего подобного. На счетах и бумаге мы умеем складывать между собой только два числа. Поэтому мы не будем сгребать вместе сразу все кучки, а поступим так, чтобы все наши действия можно было легко перенести на бумагу.

Итак, перед нами несколько кучек из монет. Мы знаем, сколько монет в каждой кучке, и теперь мы хотим узнать, сколько же у нас всего монет во всех кучках. Мы берем любые две кучки и сдвигаем их вместе, образуя одну новую кучку побольше. Умея складывать два числа на бумаге, мы сможем легко вычислить, сколько у нас монет в новой кучке без фактического их пересчета. Теперь у нас стало на одну кучку меньше. Далее, берем еще две кучки, сливаем их воедино, вычисляем новое число монет в только что образованной кучке и, таким образом, снова уменьшаем количество кучек на одну. Мы повторяем и повторяем эту процедуру, уменьшая всякий раз число кучек на единицу, до тех пор пока у нас не останется одна-единственная большая куча. Число монет в этой куче нам известно, причем вычислили мы его на бумаге, а не прямым пересчетом.

Очевидно, мы получим один и тот же ответ, совершенно независимо от того, в каком порядке мы сдвигали кучки. А значит, когда перед нами находится сумма чисел, например,

$$8 + 9 + 2,$$

мы можем вычислять ее тоже в любом порядке. Поэтому мы всегда будем выбирать такой порядок, какой для нас наиболее удобен. В данном случае удобно вначале сложить восьмерку и двойку, а потом добавить девятку:

$$8 + 2 + 9 = 10 + 9 = 19.$$

Но математический язык — это язык строгих правил. Спрашивается: на основании какого правила мы можем произвольно менять порядок вычислений при нахождении суммы нескольких слагаемым? Мы знаем, например, свойство коммутативности (которое, на школьном языке, называется также переместительным свойством сложения):

$$a + b = b + a.$$

Можем ли мы, опираясь на это свойство, написать

$$8 + 9 + 2 = 8 + 2 + 9,$$

то есть просто переставить местами девятку и двойку, подобно тому, как мы меняем местами переменные a и b? Оказывается, нет, не можем. Вспомним, что, собственно, означает запись

$$8 + 9 + 2.$$

Это, как мы раньше договорились, всего лишь упрощенный вариант более подробной записи

$$(8 + 9) + 2.$$

Коммутативность сложения означает, что мы можем переставлять местами два непосредственно складываемых друг с другом числа. То есть, мы можем написать так:

$$(8 + 9) + 2 = (9 + 8) + 2,$$

или так:

$$(8 + 9) + 2 = 2 + (8 + 9),$$

или даже так:

$$(8 + 9) + 2 = 2 + (8 + 9) = 2 + (9 + 8),$$

однако при этом никак нельзя сделать так, чтобы восьмерка вначале складывалась с двойкой, а потом прибавлялась девятка. Коммутативность означает, что мы можем с одинаковым результатом либо кучку а придвинуть к кучке b, либо наоборот, кучку b придвинуть к кучке a, но коммутативность не позволяет произвольно выбирать пары кучек для слияния.

Как же быть? Мы должны вспомнить еще об одном свойстве сложения, а именно об ассоциативности (на школьном языке оно называется сочетательным свойством сложения):

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Это свойство действительно позволяет менять порядок объединения кучек. Впрочем, далеко не произвольно. Мы теперь можем написать так:

$$(8 + 9) + 2 = 8 + (9 + 2).$$

Если раньше мы должны были сперва обязательно складывать восьмерку и девятку, то теперь можем начать с того, чтобы сложить девятку и двойку. Но это же вовсе не то, к чему мы стремимся!

На самом деле, тут нужно воспользоваться обоими свойствами сразу. С помощью ассоциативности мы пришли к выражению

$$(8 + 9) + 2 = 8 + (9 + 2).$$

Теперь воспользуемся коммутативностью и поменяем местами девятку и двойку:

$$8 + (9 + 2) = 8 + (2 + 9).$$

Далее, снова воспользуемся ассоциативностью:

$$8 + (2 + 9) = (8 + 2) + 9.$$

И наконец, перепишем конечное выражение в упрощенном виде:

$$(8 + 2) + 9 = 8 + 2 + 9.$$

После многих усилий мы получили результат, который и без того с самого начала был очевиден. Зачем же это было нужно? А если нам понадобится посчитать более длинное выражение, например,

$$1 + 8 + 5 + 2 + 9,$$

нам тоже надо будет действовать по правилам? Разве мы не сможем сразу переписать его в удобном виде:

$$(9 + 1) + (8 + 2) + 5?$$

Вопросы резонные и в них следует хорошенько разобраться.

Начнем с того, что так уж устроена математика: ученые-математики вначале вводят хорошо продуманные правила, а потом неукоснительно им следуют. Другое дело, что нам с вами (пока еще не ученым), для того чтобы хорошо решать школьные задачи, достаточно знать эти правила в сильно упрощенной форме. Я бы и не рассказывал вам ничего про коммутативность и ассоциативность, да только в школьных учебниках эти свойства (правда, под другим названием) выписаны жирным шрифтом и обведены в рамочку. При этом, однако, толком не объясняется, зачем они нужны и как их применять. Поэтому они моментально улетучиваются из памяти, что, в свою очередь, приводит к неприятностям на устных опросах и контрольных работах.

Так вот: нужны эти свойства для того, чтобы мы на законных основаниях могли по своему усмотрению менять порядок вычислений при нахождении суммы большого числа слагаемых. Разумеется, мы не будем всякий раз подробно расписывать шаг за шагом порядок применения этих свойств. Мы просто будем иметь в виду следующее:

Из свойств коммутативности и ассоциативности можно, в принципе, вывести, что складывать числа можно в абсолютно любом порядке.

Ни проверять, ни доказывать это общее утверждение мы сейчас не станем, а примем его, что называется, на веру. Вообще-то, настоящие ученые-математики ничего на веру не принимают, но мы с вами пока что еще не совсем настоящие ученые.

Теперь нам осталось уточнить еще один важный момент. Мы знаем, что складывать можно не только натуральные числа, но и целые, которые бывают и отрицательными. Спрашивается: если в сумме присутствуют отрицательные числа, то можно ли и в этом случае произвольно менять порядок суммирования?

Рассуждения с кучками монет нам теперь не помогут, потому что очень трудно представить себе кучку с отрицательным количеством монет. Но мы пойдем на этот раз другим путем. У нас уже есть некоторый опыт обращения с целыми числами, и мы имели возможность убедиться, что свойства коммутативности и ассоциативности для них сохраняются. Разумеется, наш опыт очень ограничен: ведь мы же не перебирали всех возможных комбинаций с целыми числами. Так что сомнения на этот счет вполне оправданы, и тот, у кого они возникли, может поискать опровержение. Только я не советую тратить на это слишком уж много времени, поскольку найти такое опровержение пока еще никому не удавалось. Поэтому давайте отнесемся как к факту, что сложение коммутативно и ассоциативно для любых целых чисел; и тогда из нашего общего утверждения (принятого на веру) со всей определенностью будет следовать, что порядок суммирования никак не влияет на значение суммы, даже если среди слагаемых есть отрицательные числа. Напомню, кстати, что любую разность можно переписать в виде суммы, например:

$$5 - 3 = 5 + (-3),$$
$$5 - (4 - 1) = 5 + (-4) + 1.$$

Конспект

При вычислении суммы целых чисел, состоящей из любого количества слагаемых, порядок действий можно произвольно менять. Это правило следует из коммутативности и ассоциативности сложения, но доказательство здесь не приводится.

Задачи

2.6.1. Вычислить наиболее удобным способом:

$24 + 15 + 6;$ $\quad$ $12 + 16 + 8 + 4;$
$9 + 43 + 11;$ $\quad$ $35 + 33 + 15 + 7$ и т. п.

2.6.2. Вычислить наиболее удобным способом:

$63 + 29 - 3;$ $\quad$ $190 - 3 - 90 + 13;$
$38 + 14 - 8;$ $\quad$ $-23 + 69 + 33 - 9$
$25 - 17 - 15 + 37;$ $\quad$ и т. п.

2.6.3. Дана пара выражений. Вычислить значение того из них, для которого это сделать проще:

a) $87 - (5 + 7),$ $\quad$ a) $58 + (6 - 2),$
b) $87 - (5 - 7);$ $\quad$ b) $58 + (2 - 6)$ и т.п.

2.6.4. Упростить выражение с переменной:

$10 + x + 23;$ $\quad$ $x - 4 + 15 - 6 - (x + 1)$
$-13 - (x - 2) + 43;$ $\quad$ и т. п.

2.7. Операции и операторы. Функции. Подстановки

Допустим, я прошу Дениса посчитать, сколько конфет я съел за день.

— До обеда я съел 3 конфеты, а после обеда 2 конфеты, — диктую я.

Денис записывает карандашом выражение:

$$3 + 2$$

— Э, нет, постой, после обеда я съел не 2 конфеты, а... Сейчас, подожди-ка, дай припомнить.

Денис берет резинку и стирает число 2. На его месте осталось сероватое пятнышко. Поскольку среди типографских знаков сероватых пятнышек нет, я вместо него напишу многоточие, заключенное в скобки:

$$3 + (...)$$

То, что при этом получилось, является типичным примером оператора. Вообще говоря, *оператор* — это то, что остается от выражения, если стереть в нем одно или несколько чисел, оставив все знаки арифметических действий нетронутыми. Сам по себе оператор —

вещь совершенно бессмысленная. Это всего лишь заготовка, которая превращается в полноценное выражение, только если заполнить подобающим образом прилагаемые к нему «свободные» места.

— Ага, вспомнил! — говорю я Денису. — После обеда я съел 5 конфет.

Денис записывает:

$$3 + 5 = 8.$$

Говорят, что Денис *подействовал* оператором

$$3 + (...)$$

на число 5 и в результате получил 8. В некотором смысле оператор — это своеобразная машина по переработке чисел. В данном случае Денис ввел в машину число 5, а та переработала его в число 8. Такая переработка на математическом языке называется *операцией*.

Оператор может действовать не только на числа, но и на выражения. Например, я мог бы сказать Денису, что 4 конфеты я съел сразу после обеда и еще одну конфету спустя некоторое время. Тогда Денис записал бы число конфет, съеденных мной после обеда, в виде выражения

$$4 + 1.$$

Подействовав на это выражение оператором

$$3 + (...),$$

он бы нашел общее число съеденных за день конфет в следующем виде:

$$3 + (4 + 1).$$

Правило действия оператора на выражение таково: мы просто вписываем выражение на место многоточия, а скобки сохраняем. Потом, при желании, их можно раскрыть, но это уже отдельная процедура.

Необходимость сохранения скобок легко понять на следующем примере. Допустим, я говорю Денису:

— Всего за день я съел 8 конфет. Интересно, сколько конфет я съел до обеда, если после обеда я съел... я съел... Подожди минуточку, сейчас припомню...

Денис тем временем уже заготавливает оператор

$$8 - (...).$$

Я же продолжаю:

— Вначале я съел 4 конфеты, а потом еще одну.

Денис действует заготовленным оператором на выражение

$$4 + 1$$

и получает

$$8 - (4 + 1).$$

Если бы он не сохранил скобки, то получилось бы

$$8 - 4 + 1,$$

что, конечно же, неверно.

Итак, чтобы изготовить оператор, надо взять какое-то выражение, стереть в нем некоторые числа и на их место поставить многоточие, заключенное в скобки $(...)$. Если мы стерли лишь одно единственное число, то такой оператор называется *унарным* (то есть *одинарным* или *одноместным*). Вот примеры унарных операторов:

$3 + (...)$
$4 - (...)$
$(...) + 5$
$(...) - 6$
$10 + ((...) - 2)$

На практике, последовательность символов $(...)$ писать не принято, если и без того ясно, в какое место следует поставить недостающее число. Поэтому первые четыре оператора лучше переписать так:

$3 +$
$4 -$
$+\, 5$
$-\, 6$

Лишь последний оператор из этой серии придется пока оставить, как есть:

$$10 + ((...) - 2).$$

Но тогда сразу возникает вопрос. Как же тогда отличить оператор $+\, 5$ от целого положительного числа $+5$ и как отличить оператор $-\, 6$ от целого отрицательного числа -6?

А никак. Потому что такой оператор — это одна из многих форм, которые могут принимать числа. Мы знаем, что числа, в зависимости от ситуации, можно представлять себе либо в виде кучек из конфет, либо в виде ступенек лестницы, либо в виде команд по перемещению по лестнице. Теперь этот ряд возможностей у нас еще немножко расширился.

Давайте вспомним, какие задачи мы решали с помощью целых чисел. Кузнечик прыгает по лестнице, начиная с этажа, где находится квартира Дениса. Сперва он прыгнул на 2 ступеньки вниз, потом на 5 ступенек вверх, потом опять на 7 ступенек вниз. На сколько ступенек и в каком направлении переместился кузнечик?

Мы не знаем номера ступеньки, на которой сидел кузнечик первоначально. Но в любом случае, если мы подействуем на этот номер оператором $-\, 2$, то спустимся вниз на две ступеньки. Поэтому положение кузнечика после первого прыжка можно представить в виде

$$(...) - 2,$$

или, короче:

$$-2.$$

Далее, мы действует на эту запись оператором $+\, 5$ и поднимаем кузнечика на пять ступенек вверх:

$$((...) - 2) + 5,$$

или, короче:

$$-2 + 5.$$

И, наконец, с помощью оператора $-\, 7$ опускаем его на семь ступенек вниз:

$$(((...) - 2) + 5) - 7,$$

или, короче:

$$-2 + 5 - 7.$$

Хотите — понимайте это выражение как сумму целых чисел, хотите — просто как ряд целых чисел, выписанных друг за другом, хотите — как цепочку операторов. Это уж дело вкуса. Но мы уже умеем вычислять значение подобных выражений:

$$-2+5-7=-4.$$

Значит, и цепочку операторов мы можем записать короче, или, как говорят математики, упростить:

$$(((...)-2)+5)-7=(...)-4.$$

Мы получили так называемое операторное равенство. Предполагается, что на стертые с обеих сторон места $(...)$ следует вписать одно и то же число. Пока мы не знаем, каким будет это число, можно вместо него поставить какую-нибудь переменную, например, x:

$$((x-2)+5)-7=x-4.$$

Это не что иное, как тождество, которое, после раскрытия скобок, принимает вид:

$$x-2+5-7=x-4.$$

Конечно, такая запись короче и удобнее, чем запись с многоточием. К тому же, тут уже сразу ясно, что и слева, и справа от знака равенстсва вместо переменной x должно стоять одно и то же число. Никаких дополнительных пояснений на этот счет делать не требуется.

Поэтому на практике, запись с многоточием $(...)$ никогда не употребляется. Либо многоточие и окружающие его скобки просто удаляют (и тогда запись $(...)-2$ превращается просто в -2), либо ставят на их место какую-нибудь переменную.

Нам недавно встречался оператор

$$10+((...)-2).$$

Очевидно, отсюда нельзя просто убрать $(...)$, так как тогда получилось бы

$$10+(-2),$$

а такая запись имеет совсем другой смысл. Здесь, по необходимости, приходится вводить переменную. В качестве такой переменной подойдет любая буква, но особенно часто употребляются последние три буквы латинского алфавита, то есть x, y или z. Таким образом, наш оператор можно записать, например, так:

$$10+(y-2).$$

Правда, в таком виде это называется уже не оператором, а *функцией* (или, если уж совсем точно, то функцией от независимой переменной y), но суть от перемены названия не меняется. Функция отличается от оператора только способом записи. Когда мы просто удаляем символы $(...)$, то оператор остается оператором, а когда мы вместо этих символов пишем переменную, то оператор превращается в функцию.

Функции действуют на числа и выражения точно так же, как и операторы, хотя описывается это действие несколько в других словах. Например, принято говорить, что мы находим значение функции

$$8-z$$

при

$$z=4-1.$$

Это делается с помощью так называемой *подстановки*. На место переменной z в записи $8-z$ мы подставляем то выражение, которому эта переменная равна, то есть $4-1$. При этом, во избежание неприятностей, подставляемое выражение обязательно брать в скобки:

$$8-(4-1).$$

Отсюда, искомое значение функции равно:

$$8 - (4 - 1) = 8 - 3 = 5.$$

По сути, это значит абсолютно то же самое, что подействовать оператором

$$8 - (...)$$

на выражение

$$4 - 1.$$

Фактически, функции — это не что иное, как уже знакомые нам выражения с переменными. Поэтому вместо слов «найти значение функции» часто говорят «найти значение выражения».

Всякий оператор можно записать в виде функции, но это не всегда удобно. Операторная запись часто оказывается значительно проще. Для того чтобы подействовать, например, оператором $-\ 2$ на число 3, не надо думать ни о каких подстановках, а достаточно просто это число приписать слева от оператора:

$$3 - 2.$$

Обычно в тех случаях, когда можно построить оператор, действующий посредством «приписывания», математики предпочитают пользоваться именно оператором. Но если такого оператора построить нельзя, как в рассмотренном ранее примере

$$10 + ((...) - 2),$$

то приходиться прибегать к функциям.

До сих пор мы рассматривали только унарные (одноместные) операторы. Но можно также взять какое-то выражение и стереть в нем не одно, а сразу два числа. Тогда мы получим так называемый *бинарный* (или *двуместный*) оператор. Вот примеры бинарных операторов:

$$(...) + 5 - (...) + 3,$$
$$2 - ((...) + 1) + (...).$$

Впрочем, эти примеры хороши лишь как примеры. На практике подобными операторами пользуются редко, потому что в таких случаях удобнее иметь дело с функциями двух независимых переменных:

$$x + 5 - y + 3,$$
$$2 - (u + 1) + v.$$

Однако есть и такие бинарные операторы, которые применяются очень широко. Например:

$$(...) + (...)$$

или в более короткой записи:

$$+$$

Этот оператор называется «плюс» и определяет операцию сложения. Как и всякий оператор, сам по себе он совершенно бессмыслен. Он приобретает смысл только тогда, когда по обе стороны от него приписывается по числу.

А вот другой, не менее распространенный оператор:

$$(...) - (...)$$

или же

$$-$$

Он, как нетрудно догадаться, называется «минус» и определяет операцию вычитания.

Мы настолько часто сталкиваемся с этими операторами, что приводить тут какие-то дополнительные пояснительные примеры, по-видимому, совершенно излишне.

Разумеется, если у бинарного оператора занять только одно свободное место, то получится унарный оператор. Особое значение имеют два следующих унарных оператора:

$$0 + (...),$$
$$0 - (...).$$

Это так называемые унарный плюс и унарный минус. Обычно при их написании опускают не только многоточие со скобками, но и стоящий слева ноль. В результате, по написанию они ничем не отличаются от бинарного плюса и бинарного минуса. К путанице это обычно не приводит, потому что сами по себе операторы всё равно бессмысленны и приобретают смысл только при наличии определенного окружения, а по этому окружению всегда можно догадаться, о чем, собственно, идет речь.

Например, когда мы говорим, что кузнечик сидит на ступеньке номер -2, мы имеем дело с унарным минусом, потому что -2 это на самом деле $0 - 2$. Это отражает тот факт, что номер ступеньки совпадает с командой, которую надо выполнить, чтобы переместиться на эту ступеньку с нулевого уровня.

Когда же мы говорим, что кузнечик прыгнул со ступеньки номер 3 на две ступеньки вниз:

$$3 - 2,$$

речь идет, конечно, о бинарном минусе. Впрочем, это выражение можно записать и по-другому:

$$3 + (-2).$$

Здесь снова на сцену выходит унарный минус, потому что более подробная запись выглядела бы так:

$$3 + (0 - 2).$$

Возвращаясь к вопросу о том, какая разница между оператором $- 6$ и отрицательным числом -6, можно сказать, что, если уж делать между ними различие, то оператор — это

$$(...) - 6,$$

а число — это

$$0 - 6.$$

Кстати, машина по переработке чисел с помощью операторов существует в реальности и называется калькулятор. У всякого калькулятора есть кнопки, соответствующие бинарному плюсу, бинарному минусу и унарному минусу. Унарный плюс, впрочем, отсутствует за ненадобностью.

Конспект

1. Берем числовое выражение, заменяем в нем одно из чисел на многоточие, заключенное в скобки — то есть $(...)$ — и получаем *унарный* (или *одноместный*) *оператор*. Например, выражение $3 + 2$ можно превратить в оператор $3 + (...)$. На место многоточия ... мы можем теперь вписать любое другое число, например пятерку: $3 + 5$. Говорят, что мы *подействовали* оператором $3 + (...)$ на число 5. Иначе говоря, оператор $3 + (...)$ перерабатывает

число 5 в число, равное $3 + 5 = 8$. Такая переработка называется *операцией*. Оператор может действовать не только на числа, но и на выражения. Например, если подействовать оператором $3 + (...)$ на выражение $4 + 1$, то получится $3 + (4 + 1)$.

2. Символы $(...)$ можно не писать, если и без того понятно, где они должны находиться. Например, вместо $(...) - 6$ достаточно написать $-\ 6$. Оператор $-\ 6$ фактически не отличается от отрицательного числа -6. Целые числа (иначе говоря: числа со знаками) можно представлять себе именно как разновидность операторов.

3. Пока мы не знаем, какое число поставить на место $(...)$, можно вписать туда какую-нибудь переменную. Например, вместо $8 - (...)$ написать $8 - x$. В результате получается *функция от независимой переменной* x. Впоследствии переменную x можно будет заменить на какое-нибудь число или выражение, то есть сделать *подстановку*. Например, значение функции $8 - x$ при $x = 4 - 1$ с помощью подстановки находится так:

$$8 - x = 8 - (4 - 1) = 8 - 3 = 5.$$

4. Если в числовом выражении заменить два числа на $(...)$, то получится *бинарный* (или *двуместный*) оператор. Примеры бинарных операторов:

$$(...) + (...), \text{ или сокращенно } \quad + \quad \text{(бинарный плюс)}$$

$$(...) - (...), \text{ или сокращенно } \quad - \quad \text{(бинарный минус)}$$

5. Помимо бинарного плюса и бинарного минуса, существуют также унарный плюс и унарный минус:

$$0 + (...)$$

$$0 - (...)$$

6. На практике запись операторов с $(...)$ не употребляется. Если простое стирание $(...)$ приводит к искажению смысла, то вместо операторов используются функции. В унарном плюсе и минусе опускается не только $(...)$, но и 0. Действуя этими операторами на числа, мы пишем, например, $+2$ или -3.

Задачи

2.7.1. Подействовать оператором на данное выражение и вычислить результат. (Здесь и далее требуется вначале выполнить подстановку, а потом произвести вычисления.)

Оператор	Выражение
$22\ -$	$10 + 2$
$-\ 8$	$14 + 13$
$1\ +$	$41 - 2$
и т. п.	

2.7.2. Подействовать оператором на данное выражение с параметром и упростить результат.

Оператор	Выражение
$38\ -$	$a + 12$
$-\ 14$	$a - 13$
$12\ +$	$11 - a$
и т. п.	

2.7.3. Подействовать бинарным оператором на данные выражения и вычислить результат (первое выражение поставить слева, а второе — справа от оператора).

Оператор	Первое выражение	Второе выражение
$+$	$13-8$	$38-3$
$-$	$27-14$	$17-44$
$+1-$	$25-12$	$59+14$
и т. п.		

2.7.4. Подействовать бинарным оператором на данные выражения с параметром и упростить результат (первое выражение поставить слева, а второе — справа от оператора).

Оператор	Первое выражение	Второе выражение
$+$	$a-8$	$38-3$
$-$	$27-14$	$17-a$
$+1-$	$a-12$	$59-a$
и т. п.		

2.7.5. Вычислить значение функции при заданном значении переменной.

Функция	Значение переменной
$x+10$	$x=5$
$55-x$	$x=14$
$23+(34-x)$	$x=18$
и т. п.	

2.7.6. Выразить значение функции через параметр a при заданном значении переменной x.

Функция	Значение переменной
$x+10$	$x=a-5$
$55-x$	$x=14-a$
$23+(34-x)$	$x=18-a$
и т. п.	

2.7.7. Вычислить значение функции от двух переменных.

Функция	Значения переменных
$x+y$	$x=15,\ y=62$
$x-(5-y)$	$x=90,\ y=20$
$(90-x)-(45-y)$	$x=16,\ y=10$
и т. п.	

2.7.8. Выразить значение функции через параметр a при заданном значении переменных x и y.

Функция	Значения переменных
$x+y$	$x=12-a,\ y=14$
$x-(38-y)$	$x=55,\ y=20+a$
$(62-x)-(29+y)$	$x=1+a,\ y=11$
и т. п.	